



# М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

## КВАДРАТНИ ПАРАМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА II ЧАСТ

Христо Лесов, гр. Казанлък

1. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $d$ , за които числата от интервала:
  - а)  $[0;1]$  са решения на неравенството  $x^2 - x + d \leq 0$ ;
  - б)  $(0;1)$  са решения на неравенството  $x^2 - dx + 1 < 0$ .
2. Да се намерят целите стойности на параметъра  $k$ , за които неравенството  $2x^2 + (2k+9)x + 2k^2 + 3k < 0$  е изпълнено за всяко число от интервала  $[-2; -1]$ .
3. Да се намерят целите стойности на параметъра  $n$ , за които абсолютната стойност на всяко решение на неравенството  $nx^2 + (1-n^2)x - n \geq 0$  е не по-голяма от 2.
4. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $m$ , за които всяко решение на неравенството  $x^2 - 3x + 2 < 0$  е решение и на неравенството  $mx^2 - (3m+1)x + 3 > 0$ .
5. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $m$ , за които всяко решение на неравенството  $2x^2 + (m+7)x + 5m + 1 < 0$  е решение и на неравенството  $x^2 + 4x + 3 < 0$ .
6. Да се намерят целите стойности на параметъра  $k$ , за които всяко решение на неравенството  $x - 4k - 1 > 0$  е решение и на неравенството  $x^2 - 4kx - 15k + 4 > 0$ .
7. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $a$ , за които множеството от решенията на неравенството:
  - а)  $x^2 + ax - 2 < 0$  е интервал с дължина 3;
  - б)  $4x(a-x) - 5(2a-5) > 0$  е интервал с дължина 2.
8. Да се намерят стойностите на реалния параметър  $b$ , за които неравенството  $bx^2 - 3x + 2 < 0$  има решения и множеството от решенията му е интервал с дължина, по-малка от 1.
9. Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $c$ , за които множеството от решенията на неравенството  $cz^2 - (2c+1)z - 1 \leq 0$  съдържа точно три цели числа.
10. Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $m$ , за които неравенството  $mx^2 + 8(m-1)x + 7m - 16 \leq 0$  има най-много шест решения, които са цели числа и едното от тях е 2.

### Отговори, упътвания и кратки решения

1. а) Ще използваме твърдението: Числата от интервала  $[p; q]$  са решения на неравенството  $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$  при  $a > 0$  тогава и само тогава, когато  $f(p) \leq 0$  и  $f(q) \leq 0$ . При  $p = 0$ ,  $q = 1$  и  $f(x) = x^2 - x + d$  имаме  $f(0) = f(1) = d \leq 0$ .

б) Ще използваме твърдението: Числата от интервала  $(p; q)$  са решения на неравенството  $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$  при  $a > 0$  тогава и само тогава, когато  $f(p) \leq 0$  и  $f(q) \leq 0$ . При  $p = 1$ ,  $q = 2$  и  $f(x) = x^2 - dx + 1$  имаме  $f(1) = 2 - d \leq 0$  и  $f(2) = 5 - 2d \leq 0$ , откъдето  $d \geq 2$  и  $d \geq 2,5$ . Следователно търсените стойности са  $d \geq 2,5$ .

2. Както в 1., в сила е твърдението: Всяко число от интервала  $[p; q]$  е решение на неравенството  $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$  при  $a > 0$  тогава и само тогава, когато  $f(p) < 0$  и  $f(q) < 0$ . При  $p = -2$ ,  $q = -1$  и имаме

$$f(-2) = 8 - 2(2k + 9) + 2k^2 + 3k = 2k^2 - k - 10 < 0 \text{ и}$$

$$f(-1) = 2 - (2k + 9) + 2k^2 + 3k = 2k^2 + k - 7 < 0.$$

Съответните решения са  $-2 < k < 2,5$  и  $\frac{1}{4}(-1 - \sqrt{57}) < k < \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{57})$ . Тъй като  $7 < \sqrt{57} < 8$ ,

то  $-2,25 < \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{57}) < -2$  и  $1,5 < \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{57}) < 2$ . Оттук получаваме общото решение

$-2 < k < \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{57})$  и следователно търсените стойности на  $k$  са  $-1$ ,  $0$  и  $1$ .

3. При  $n = 0$  даденото неравенство е  $x \geq 0$  и не е изпълнено условието на задачата.

При  $n \neq 0$  неравенството се представя във вида  $n(x - n) \left( x + \frac{1}{n} \right) \geq 0$ . При  $n > 0$  решенията на последното са обединение на два безкрайни числови интервала и не удовлетворяват условието  $|x| \leq 2$ . При  $n < 0$  даденото неравенство е равносилно на  $(x - n) \left( x + \frac{1}{n} \right) \leq 0$ , като  $n < -\frac{1}{n}$  и решенията са  $n \leq x \leq -\frac{1}{n}$ . Следователно  $n \geq -2$  и  $-\frac{1}{n} \leq 2$ , откъдето  $-2 \leq n \leq -\frac{1}{2}$ , а търсените цели стойности са  $-2$  и  $-1$ .

4. Решенията на неравенството  $x^2 - 3x + 2 < 0$  са  $1 < x < 2$ . При  $m = 0$  второто неравенство има вида  $x < 3$  и съдържа интервала  $(1; 2)$  таса, че е изпълнено условието на задачата.

При  $m \neq 0$  второто неравенство се представя във вида  $m(x - 3) \left( x - \frac{1}{m} \right) > 0$ . При

$m < 0$  то е  $(x - 3) \left( x - \frac{1}{m} \right) < 0$ , като  $\frac{1}{m} < 0 < 3$ . Решенията му са  $\frac{1}{m} < x < 3$  и съдържат

интервала  $(1; 2)$ . При  $m > 0$  имаме  $(x - 3) \left( x - \frac{1}{m} \right) > 0$  и за неговите решения има следните

възможности:

- 1)  $\frac{1}{m} = 3$ , т.е.  $m = \frac{1}{3}$ . Тогава  $(x-3)^2 > 0$  е в сила за всяко  $x \neq 3$ , а и за  $1 < x < 2$ ;
- 2)  $\frac{1}{m} > 3$ , т.е.  $m < \frac{1}{3}$ . Тогава решенията са  $x < 3$  или  $x > \frac{1}{m}$  и включват числата от

(1;2);

- 3)  $\frac{1}{m} < 3$ , т.е.  $m > \frac{1}{3}$ . Тогава решенията са  $x < \frac{1}{m}$  или  $x > 3$  и съдържат (1;2) само ако  $\frac{1}{m} \geq 2$ , т.е.  $m \leq \frac{1}{2}$ . Отговорът на задачата е  $m \leq \frac{1}{2}$ .

5. Решенията на неравенството  $x^2 + 4x + 3 < 0$  са  $-3 < x < -1$ . Решенията на първото неравенство зависят от дискриминантата  $D$  на квадратния тричлен  $f(x) = 2x^2 + (m+7)x + 5m+1$ . Ако  $D \leq 0$ , то  $f(x) \geq 0$  за всяко  $x$ , а за да има решения  $f(x) < 0$ , е необходимо  $D = (m+7)^2 - 8(5m+1) > 0$ , т.е.  $m^2 - 26m + 41 > 0$ , откъдето  $m < 13 - \sqrt{128}$  или  $m > 13 + \sqrt{128}$ . Тогава решенията на  $f(x) < 0$  са  $x_2 < x < x_1$ , където  $x_{1,2} = \frac{-(m+7) \pm \sqrt{D}}{4}$  и следва, че условието на задачата е изпълнено, когато  $x_1 \leq -1$  и  $x_2 \geq -3$ , т.е.  $\frac{-(m+7) + \sqrt{D}}{4} \leq -1$  и  $\frac{-(m+7) - \sqrt{D}}{4} \geq -3$ . Тези две неравенства се преобразуват до  $\sqrt{D} \leq m+3$  и  $\sqrt{D} \leq 5-m$ . Тъй като  $\sqrt{D} > 0$ , трябва  $m+3 > 0$  и  $5-m > 0$ , т.е.  $-3 < m < 5$  и стигаме до неравенствата  $D \leq (m+3)^2$  и  $D \leq (5-m)^2$  или  $m^2 - 26m + 41 \leq m^2 + 6m + 9$  и  $m^2 - 26m + 41 \leq 25 - 10m + m^2$ , които имат общо решение  $m \geq 1$ . Отчитайки получените резултати, окончателно намираме  $1 \leq m < 13 - 8\sqrt{2}$ .

6. Дадените неравенства се записват така:  $x - 2k > 2k + 1$  и  $(x - 2k)^2 > (k+4)(4k-1)$ . След полагане  $x - 2k = y$  те приемат вида  $y > 2k + 1$  и  $y^2 > (k+4)(4k-1)$ . При  $(k+4)(4k-1) < 0$ , т.е.  $k \leq -4$  или  $k \geq \frac{1}{4}$  решенията на второто неравенство са  $y < -\sqrt{(k+4)(4k-1)}$  или  $y > \sqrt{(k+4)(4k-1)}$ . За да се съдържат в тях решенията на  $y > 2k + 1$ , трябва  $2k + 1 \geq \sqrt{(k+4)(4k-1)}$ . При  $k \leq -4$  това не е в сила, защото  $2k + 1 < 0$ . При  $k \geq \frac{1}{4}$  имаме  $2k + 1 > 0$  и след повдигане в квадрат получаваме  $(2k+1)^2 \geq 4k^2 + 15k - 4$  или  $11k \leq 5$ , т.е.  $k \leq \frac{5}{11}$ . След обединяване на резултатите намираме  $-4 < k \leq \frac{5}{11}$  и търсените цели стойности за  $k$  са:  $-3, -2, -1$  и  $0$ .

7. а) Дискриминантата на квадратния тричлен  $x^2 + ax - 2$  е  $D = a^2 + 8 > 0$  за всяко реално  $a$  и уравнението  $x^2 + ax - 2 = 0$  има два различни корена  $x_1 > x_2$ . Множеството от решенията на даденото неравенство е интервала  $(x_2; x_1)$ , чиято дължина е  $x_1 - x_2 = 3$  по условие. Тъй като  $x_1 - x_2 = \sqrt{D}$ , имаме  $\sqrt{D} = 3$  или  $a^2 + 8 = 9$ , откъдето намираме  $a = \pm 1$ .

б) Даденото неравенство се представя във вида  $(2x-5)(2x+5-2a) < 0$ . Множеството от решенията му е отворен интервал с краища  $\frac{5}{2}$  и  $a - \frac{5}{2}$ , чиято дължина е  $|a-5|=2$  по условие. Оттук  $a-5=2$  или  $a-5=-2$  и следователно  $a=7$  и  $a=3$ .

8. При  $b=0$  неравенството е  $-3x+2 < 0$ , т.е.  $x > \frac{2}{3}$  и условието на задачата не е изпълнено. При  $b \neq 0$  дискриминантата на квадратния тричлен  $bx^2 - 3x + 2$  е  $D = 9 - 8b$ . Ако  $D \leq 0$ , т.е.  $b \geq \frac{9}{8}$ , даденото неравенство няма решение. При  $b < \frac{9}{8}$  имаме  $D > 0$  и уравнението  $bx^2 - 3x + 2 = 0$  има два различни корена  $x_1 > x_2$ . При  $b < 0$  множеството от решенията на неравенството е обединение на два безкрайни интервала и пак не е изпълнено условието на задачата. При  $0 < b < \frac{9}{8}$  решенията образуват интервала  $(x_2; x_1)$  и по условие  $x_1 - x_2 < 1$  или  $\sqrt{D} < 1$ , т.е.  $D = 9 - 8b < 1$ , откъдето  $b > 1$ . Отговорът на задачата е  $1 < b < \frac{9}{8}$ .

9. При  $c \leq 0$  даденото неравенство има безброй много цели решения. Разглеждаме  $g(z) = cz^2 - (2c+1)z - 1$  при  $c > 0$  и дискриминантата  $D = (2c+1)^2 + 4c > 0$ . Тогава уравнението  $g(z) = 0$  има два различни корена  $z_1 > z_2$  и множеството от решенията на неравенството  $g(z) \leq 0$  е интервалът  $[z_2; z_1]$ . Тъй като  $g(0) = -1 < 0$ , то нулата е решение на  $g(z) < 0$ . А понеже  $g(-1) = 3c > 0$ , следва, че  $-1$  не е решение на даденото неравенство. Това показва, че множеството от решенията не съдържа отрицателни цели числа. Но  $g(1) = -c - 2 < 0$  и  $g(2) = -3 < 0$ , откъдето следва, че целите числа 0, 1 и 2 удовлетворяват условието на задачата. За да няма други цели решения, трябва  $z_1 < 3$  или  $g(3) = 3c - 4 > 0$ , т.е.  $c > \frac{4}{3}$  и това е отговорът на задачата.

10. При  $m=0$  даденото неравенство е  $-8x-16 \leq 0$ , т.е.  $x \geq -2$  и има безброй много цели решения. При  $m \neq 0$  разглеждаме квадратния тричлен  $f(x) = mx^2 + 8(m-1)x + 7m - 16$  и неговата дискриминанта  $D = 16(m-1)^2 - m(7m-16) = 9m^2 - 16m + 16 > 0$ . Уравнението  $f(x) = 0$  има два различни корена  $x_1 > x_2$  и при  $m < 0$  множеството от решенията на неравенството  $f(x) \leq 0$  е обединение на безкрайните интервали  $(-\infty; x_2]$  и  $[x_1; \infty)$ , които съдържат безброй много цели числа. При  $m > 0$  решенията на  $f(x) \leq 0$  образуват интервала  $[x_2; x_1]$ , който по условие съдържа числото 2. Следователно  $f(2) \leq 0$ , т.е.  $4m + 16(m-1) + 7m - 16 = 27m - 32 \leq 0$  и оттук  $m \leq \frac{32}{27}$ . Но

$$f(-1) = m - 8(m-1) + 7m - 16 = -8 < 0,$$

което означава, че числото  $-1$  е винаги решение на  $f(x) < 0$ . От  $f(-2) = 4m - 16(m-1) + 7m - 16 = -5m < 0$  при  $m > 0$  следва, че и числото  $-2$  е решение на  $f(x) < 0$ . Освен това при Следователно при  $0 < m \leq \frac{32}{7}$  имаме

$$f(0) = 7m - 16 \leq 7 \cdot \frac{32}{7} - 16 = -\frac{208}{7} < 0 \text{ и}$$

$$f(1) = m + 8(m-1) + 7m - 16 = 16m - 24 \leq 16 \cdot \frac{32}{7} - 24 = -\frac{136}{7} < 0.$$

Следователно числата  $0$  и  $1$  са също решения на  $f(x) < 0$ . Заключаваме, че при  $0 < m \leq \frac{32}{7}$  неравенството  $f(x) \leq 0$  има поне пет цели решения. Това са числата  $2, 1, 0, -1$  и  $-2$ . Тъй като  $f(3) = 9m + 24(m-1) + 7m - 16 = 40(m-1)$  и  $f(-3) = 9m - 24(m-1) + 7m - 16 = -8(m-1)$ , разглеждаме следните случаи:

Случай 1.  $m = 1$ . Имаме  $f(3) = f(-3) = 0$  и неравенството  $f(x) \leq 0$  има седем цели решения.

Случай 2.  $0 < m < 1$ . Имаме  $f(3) < 0$ ,  $f(-3) > 0$  и

$$f(-4) = 16m - 32(m-1) + 7m - 16 = 16 - 9m > 0.$$

За да не станат целите решения повече от шест, трябва

$$f(4) = 16m + 32(m-1) + 7m - 16 = 55m - 48 > 0.$$

Оттук следва, че при  $\frac{48}{55} < m < 1$  даденото неравенство има шест цели решения:  $3, 2, 1, 0, -1$  и  $-2$ .

Случай 3.  $1 < m \leq \frac{32}{7}$ . Имаме  $f(3) > 0$ ,  $f(-3) < 0$ ,  $f(-4) > 0$  и  $f(4) > 0$ . Целите решения на даденото неравенство са шестте числа:  $2, 1, 0, -1, -2$  и  $-3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Becheanu, M., B. Enescu (2002). *Inegalitati elementare*. Bucurest: Gil. (973-9238-53-X), 156 pages.
2. Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

## SECOND ORDER ALGEBRAIC EQUATIONS WITH PARAMETERS. PART II

Hristo Lessov

**Abstract.** Second order algebraic equations with parameters are considered in the paper. Different cases are discussed. The proposed problems are with methodological solutions and are suitable for 9<sup>th</sup> and 10<sup>th</sup> grade students.