

М + Р Е Ш Е Н И Я

М+553. Да се определят всички цели числа x , при които изразът $\frac{x^3-1}{7x-1}$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Тъй като $\frac{x^3-1}{7x-1}$ е цяло, то $7^3 \cdot \frac{x^3-1}{7x-1}$ също е цяло число. Оттук $7^3 \cdot \frac{x^3-1}{7x-1} = 49x^2 + 7x + 1 - \frac{342}{7x-1}$. Следователно $7x-1$ дели 342 , т.е. $7x-1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 19, \pm 38, \pm 57, \pm 114, \pm 171, \pm 342\}$. Оттук намираме, че $x \in \{-8, 0, 1, 49\}$.

М+554. Нека $y = \cos^4 x - \cos 2x + \sin x - 2\sin^3 x - 2$. За кои стойности на реалните числа a и b е изпълнено $y \in [a, b]$ за всички реални стойности на x ?

(Росен Николаев, гр. Варна)

Решение на Катя Чалъкова. След преобразувания, за y получаваме $y = (\cos^2 x + \sin x)^2 - (\cos^2 x + \sin x) - 2$. Тъй като $\cos^2 x + \sin x = -\sin^2 x + \sin x + 1$, то $y = (-\sin^2 x + \sin x + 1)^2 - (-\sin^2 x + \sin x + 1) - 2$. Полагаме $\sin x = t$, $t \in [-1, 1]$ и разглеждаме функцията $g(t) = -t^2 + t + 1$. От свойствата на квадратната функция и равенствата $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, $g(-1) = -1$ и $g(1) = 1$ следва, че при $t \in [-1, 1]$ е изпълнено $g \in \left[-1; \frac{5}{4}\right]$. Следователно $y \in \left[-\frac{9}{4}; 0\right]$. Затова $a \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right]$ и $b \in [0; +\infty)$.

М+555. Ако p е естествено число, да се пресметне границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{pn} \sqrt{1+k^2} \sin(\operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg} n).$$

(Теодора Радулеску, Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. От формулите $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ и $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следва равенството $\sin(\operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg} n) = \sin(\operatorname{arctg} k) \cos(\operatorname{arctg} n) - \sin(\operatorname{arctg} n) \cos(\operatorname{arctg} k) =$

$$= \frac{k-n}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{n^2+1}}.$$

Оттук имаме $S_n = \sum_{k=1}^{pn} \sqrt{1+k^2} \sin(\operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg} n) =$

$$= \sum_{k=1}^{pn} \frac{k-n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2(p^2-2p)+pn}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Последното равенство води до окончателните

$$\text{результати: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} -\infty, & p = 1, \\ \frac{1}{2}, & p = 2, \\ +\infty, & p \geq 3. \end{cases}$$

Продължението е в следващия брой.