М+ СЕМИНАР

АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ БЕЗ ПРОИЗВОДНИ

проф. Сава Гроздев, доц. д-р Веселин Ненков

В тази бележка ще изложим няколко подхода за решаване на алгебрични уравнения с радикали без използване на производни. Разсъжденията се базират на интуитивната представа за непрекъсната функция, което означава, че графиката на такава функция може да се чертае без вдигане на молива от листа. Нека $f(x)$ е такава функция. Тя е монотонно растяща (съответно монотонно намаляваща), ако за всеки две точки от дефиниционното множество на функцията x_1 и x_2, за които $x_1 > x_2$, е изпълнено $f(x_1) \geq f(x_2)$ (съответно $f(x_1) \leq f(x_2)$). Функцията е строго монотонно растяща (съответно строго монотонно намаляваща), ако $f(x_1) > f(x_2)$ (съответно $f(x_1) < f(x_2)$).

Ще използваме следните свойства на монотонните функции:

Свойство 1. Ако функцията $f(x)$ е строго монотонна растяща, а функцията $g(x)$ е монотонно намаляваща, то уравнението $f(x) = g(x)$ има не повече от едно решение.

Доказателство: Да допуснем, че уравнението има две решения $x_1 > x_2$. Тогава $g(x_1) = f(x_1) > f(x_2) = g(x_2)$, т.е. $g(x_1) > g(x_2)$, което е невъзможно.

Свойство 2. Ако $f(x)$ е строго монотонна, то $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Доказателство: Без ограничение нека считаме, че функцията $f(x)$ е строго монотонна растяща. Ако $a = b$, то очевидно $f(a) = f(b)$. Обратно, нека $f(a) = f(b)$ и да допуснем, че $a > b$. Но тогава $f(a) > f(b)$, което е противоречие. Аналогично стигаме до противоречие, ако допуснем, че $a < b$. Заключаваме, че от $f(a) = f(b)$ следва $a = b$.

Свойство 3. Ако $f(x)$ е строго монотонно растяща функция, то уравненията $f(f(x)) = x$ и $f(x) = x$ са еквивалентни.

Доказателство: Ако x е решение на $f(x) = x$, то очевидно $f(f(x)) = x$. Обратно, нека x е решение на $f(f(x)) = x$ и нека $f(x) = y$. Да допуснем, че $y > x$. Тогава $f(y) > f(x) = y$, т.е. $f(y) > y$. Но от $f(f(x)) = x$ следва, че $f(y) = x$ и заключаваме, че $x > y$, което е противоречие. Аналогично стигаме до противоречие, ако $y < x$. Остава единствената възможност $y = x$, т.е. $f(x) = x$.

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=5-x.$$

Решение: Задачата има смисъл при $x\geq -1$. Функцията $f\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)$ е строго монотонно растяща като сбор на строго монотонно растящи функции, а функцията $g(x)=5-x$ е монотонно намаляваща (дори строго монотонно намаляваща). Непосредствено се проверява, че $f(2)=g(2)=3$ и съгласно Свойство 1 уравнението от условието на задачата има единствено решение $x=2$.

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{3x^2-12x+16}=-2x^2+8x-5.$$

Решение: Тъй като дискриминантите на квадратните тричлени под двата радикала са отрицателни, задачата има смисъл за всяко реално число x. Нека $y=x^2-4x+5$. Тогава уравнението се записва във вида $\sqrt{z}+\sqrt{3z+1}=-2z+5$. Лявата страна на последното уравнение е строго монотонно растяща функция, а дясната е монотонно намаляваща функция (дори строго монотонно намаляваща). От друга страна $\sqrt{1}+\sqrt{3.1+1}=3=-2.1+5$ и с помощта на свойство 1 заключаваме, че задачата има единствено решение $x=1$.

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Решение: Последователното повдигане в квадрат с цел освобождаване от радикалите не е подходящо. Вместо това, да разгледаме функцията $f(y)=y\left(2+\sqrt{y^2+3}\right)$. Тогава уравнението се записва във вида $f(2x+1)+f(3x)=0$. Ще докажем, че $f(x)$ е строго монотонно растяща функция. Нека $x_1>x_2$.

<u>*Случай 1*</u>. $x_1>x_2>0$. Имаме $x_1^2>x_2^2$, откъдето последователно $x_1^2+3>x_2^2+3$, $\sqrt{x_1^2+3}>\sqrt{x_2^2+3}$ и $2+\sqrt{x_1^2+3}>2+\sqrt{x_2^2+3}$. Заключаваме, че

$$x_1\left(2+\sqrt{x_1^2+3}\right)>x_2\left(2+\sqrt{x_2^2+3}\right), \tag{1}$$

защото двата множителя вляво са по-големи от съответните множители вдясно. Следователно $f(x_1)>f(x_2)$.

<u>*Случай 2*</u>. $x_1>0$ и $x_2<0$. Сега в лявата страна на (1) стои положително число, а в дясната – отрицателно, т.е. неравенството е изпълнено и отново $f(x_1)>f(x_2)$.

<u>*Случай 3*</u>. $0>x_1>x_2$. Тогава $-x_2>-x_1>0$ и $x_2^2>x_1^2$. Пак последователно имаме $x_2^2+3>x_1^2+3$, $\sqrt{x_2^2+3}>\sqrt{x_1^2+3}$ и $2+\sqrt{x_2^2+3}>2+\sqrt{x_1^2+3}$. Оттук

$$(-x_2)\left(2+\sqrt{x_2^2+3}\right)>(-x_1)\left(2+\sqrt{x_1^2+3}\right)$$

и като умножим двете страни на последното с -1, получаваме (1), т.е. отново $f(x_1)>f(x_2)$.

Да забележим още, че $f(-y)=-y\left(2+\sqrt{y^2+3}\right)=-f(y)$, т.е. функцията е нечетна. Окончателно получаваме $f(2x+1)+f(3x)=0 \Leftrightarrow f(2x+1)=-f(3x)=f(-3x)$, т.е. $f(2x+1)=f(-3x)$ и съгласно Свойство 2 стигаме до $2x+1=-3x$, т.е. $x=-\dfrac{1}{5}$.

Задача 4. Да се реши уравнението:

$$4x^3+1=5\sqrt[3]{\frac{5x-1}{4}}\ .$$

Решение: Като повдигнем двеше страни на уравнението на трета степен, получаваме $\left(4x^3+1\right)^3=5^3\cdot\frac{5x-1}{4}$, откъдето $x=\frac{4\left(\frac{4x^3+1}{5}\right)^3+1}{5}$. Да разгледаме функцията $f(y)=\frac{4y^3+1}{5}$. Лесно се проверява, че тя е строго монотонно растяща. Сега уравнението се записва във вида $f(f(x))=x$. Съгласно Свойство 3 това уравнение е еквивалентно с $f(x)=x$, т.е. с $\frac{4x^3+1}{5}=x$. Оттук $4x^3-5x+1=0$ и $(x-1)(4x^2+4x-1)=0$. Корените на последното уравнение са 1 и $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$, които са решения и на задачата.

За упражнение на читателите предлагаме следните задачи:

Задача 5. Да се реши уравнението:

$$1+\sqrt[3]{x+9}=-x+2\ .$$

Упътване. Функцията $f(x)=1+\sqrt[3]{x+9}$ е строго монотонно растяща, а функцията $g(x)=-x+2$ е строго монотонно намаляваща. Уравнението има единствено решение $x=-1$.

Задача 6. Да се реши уравнението:

$$x^2-4x+6+\sqrt[3]{2x^2-8x+9}=3-\sqrt{4x-8}\ .$$

Упътване. Задачата има смисъл при $x\ge 2$. Лявата страна на уравнението е строго монотонно растяща функция, а дясната страна е строго монотонно намаляваща функция. Задачата има единствено решение $x=2$.

Задача 7. Да се реши уравнението:

$$x^3+4=5\sqrt[3]{5x-4}\ .$$

Упътване. $x=\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5x-4}-4}$, $x=\sqrt[3]{5x-4}$, $x^3-5x+4=0$, $x=2$, $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

ALGEBRAIC EQUATIONS WITHOUT DERIVATIVES

Prof. Sava Grozdev. Assoc. prof. Dr. Veselin Nenkov

Abstract. Several algebraic equations and their solutions without derivatives are considered. Different approaches are proposed based on continuous and monotone functions.