М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ПАРАЛЕЛЕПИПЕДИ И ПРИЗМИ

Христо Лесов, гр. Казанлък

Определение 1. Многостен, две от стените на който са еднакви n-ъгълници ($n \geq 3$), лежащи в успоредни равнини, а останалите стени са n на брой успоредници, се нарича n-ъгълна призма.

Определение 2. Призма, основите на която са успоредници, се нарича паралелепипед. Срещуположните стени на паралелепипеда са еднакви успоредници.

Определение 3. Височина на призма е отсечка с краища върху основите ѝ, която е перпендикулярна на тях. Дължината на височината на призма е равна на разстоянието между основите.

Определение 4. Призма, чиито околни ръбове са перпендикулярни на основите, се нарича права призма. Всеки околен ръб на права призма е нейна височина, а околните ѝ стени са правоъгълници.

Определение 5. Права призма с основи еднакви правилни n-ъгълници ($n \geq 3$), се нарича правилна n-ъгълна призма.

Определение 6. Прав паралелепипед с основи правоъгълници се нарича правоъгълен паралелепипед. Стените на правоъгълния паралелепипед са правоъгълници.

Определение 7. Правоъгълен паралелепипед, на който всички ръбове са равни, се нарича куб. Стените на куба са еднакви квадрати.

Задача 1. От всички правоъгълни паралелепипеди с даден обем V да се намери този, който има най-малко лице на повърхнината.

Задача 2. От всички правоъгълни паралелепипеди с дадено лице S на повърхнината да се намери този, който има най-голям обем.

Задача 3. От всички прави паралелепипеди с даден обем V да се намери този, който има най-малко лице на повърхнината.

Задача 4. От всички прави паралелепипеди с дадено лице S на повърхнината да се намери този, който има най-голям обем.

Задача 5. От всички триъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 6. От всички триъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Задача 7. От всички четириъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 8. От всички четириъгълни призми с дадени периметър $2p$ на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Задача 9. От всички n-ъгълни ($n \geq 3$) призми с дадени периметър P на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голям обем.

Задача 10. От всички n-ъгълни ($n \geq 3$) призми с дадени периметър P на основите и дължина l на околните ръбове да се намери тази, която има най-голямо лице на повърхнината.

Отговори, упътвания, решения

Задача 1. Нека измеренията на правоъгълен паралелепипед са a, b, c. Тогава обемът му е $V = abc$, а лицето на повърхнината е $S = 2(ab + bc + ca)$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за положителни числа a, b, c имаме:

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}\,,$$

като равенството се достига само когато $ab = bc = ca$, т.е. само при $a = b = c$. Така получаваме

$$S = 2(ab + bc + ca) \geq 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ или } S \geq 6\sqrt[3]{V^2}\,.$$

Оттук следва, че най-малката стойност на S е $6\sqrt[3]{V^2}$ и тя се достига само при $a = b = c = \sqrt[3]{V}$, т.е. само за куба с дължина $\sqrt[3]{V}$ на ръбовете.

Задача 2. От предната задача използваме означенията и неравенство $S \geq 6\sqrt[3]{V^2}$, което е равносилно на $V^2 \leq \dfrac{S^3}{216}$ или $V \leq \dfrac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$. Оттук вече следва, че най-голямата стойност на V е $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и тя се достига само при $a = b = c = \sqrt{\frac{S}{6}}$, т.е. само за куба с дължина $\sqrt{\frac{S}{6}}$ на ръбовете.

Задача 3. Означаваме с a и b дължините на ръбовете при основите на прав паралелепипед, с γ – мярката на ъгъла между тях , а с c дължините на околните ръбове. Тогава лицето на основата е $B = ab.\sin\gamma$, обемът е $V = B.c = ab.\sin\gamma.c$, а лицето на повърхнината е $S = 2(ab.\sin\gamma + bc + ca)$. Тъй като $0^{\circ} < \gamma < 180^{\circ}$, то $0 < \sin\gamma \leq 1$ и от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$ab.\sin\gamma + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab.\sin\gamma.bc.ca} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2.\sin^2\gamma.c^2}$$, понеже $1 \geq \sin\gamma \geq \sin^2\gamma > 0$.

Така получаваме $S = 2(ab.\sin\gamma + bc + ca) \geq 6\sqrt[3]{V^2}$, като равенството се достига само когато $\sin\gamma = 1$, т.е. $\gamma = 90^{\circ}$ и $a = b = c = \sqrt[3]{V}$. Следователно най-малката стойност на S е $6\sqrt[3]{V^2}$ и тя се достига само за правоъгълен паралелепипед с дължина $\sqrt[3]{V}$ на ръбовете, т.е. само за куба с тези ръбове.

Задача 4. Както в решението на предната задача и при същите означения получаваме неравенството $S \geq 6\sqrt[3]{V^2}$. То е равносилно на $V^2 \leq \frac{S^3}{216}$ или $V \leq \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и оттук следва, че най-голямата стойност на V е $\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ и тя се достига само за правоъгълен паралелепипед с дължина $\sqrt{\frac{S}{6}}$ на ръбовете, т.е. само за куба с тези ръбове.

Задача 5. Означаваме с a, b, c дължините на страните на основите-триъгълници с даден периметър $2p$. За тяхното лице B е изпълнено неравенството $B \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$, доказано в [3] – задача 1, а за височината h на призмата имаме $h \leq l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2 l$, като равенството се достига само когато $a = b = c = \frac{2}{3}p$ и $h = l$. Оттук следва, че най-голям обем има тази права триъгълна призма, чиито основи са равностранни триъгълници с дължини $\frac{2}{3}p$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената триъгълна призма е правилна.

Задача 6. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + S_3$, където S_1, S_2, S_3 са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a и l, b и l, c и l.

Ако $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1$, $0 < \sin\varphi_3 \le 1$ и имаме $S_1 = a.l.\sin\varphi_1 \le a.l$, $S_2 = b.l.\sin\varphi_2 \le b.l$, $S_3 = c.l.\sin\varphi_3 \le c.l$. Така получаваме неравенството $S \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.p^2 + (a + b + c).l$ или $S \le \frac{2\sqrt{3}}{9}.p^2 + 2p.l$, като равенството се достига само когато $a = b = c = \frac{2}{3}p$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна триъгълна призма от Задача 5.

Задача 7. Означаваме с a, b, c, d дължините на страните на основите, които са четириъгълници с даден периметър $2p$. За тяхното лице B е изпълнено неравенството $B \le \frac{1}{4}p^2$, доказано в [4] – задача 5, а за височината h на призмата имаме $h \le l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \le \frac{1}{4}p^2.\ l$, като равенството се достига само за права призма с основи квадрати с дължини на страните $a = b = c = d = \frac{1}{2}p$ и $h = l$. Оттук следва, че най-голям обем има тази права четириъгълна призма, чиито основи са квадрати с дължини $\frac{1}{2}p$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената четириъгълна призма е правилна.

Задача 8. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, където S_1, S_2, S_3, S_4 са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a и l, b и l, c и l, d и l. Ако $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0$, $0^0 < \varphi_4 < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1$, $0 < \sin\varphi_3 \le 1$, $0 < \sin\varphi_4 \le 1$ и имаме $S_1 = a.l.\sin\varphi_1 \le a.l$, $S_2 = b.l.\sin\varphi_2 \le b.l$, $S_3 = c.l.\sin\varphi_3 \le c.l$, $S_4 = d.l.\sin\varphi_4 \le d.l$. Така получаваме следното неравенство:

$$S \le \frac{1}{2}p^2 + (a + b + c + d).l \text{ или } S \le \frac{1}{2}p^2 + 2p.l,$$

като равенството се достига само за призма с основи квадрати с дължини на страните $a = b = c = d = \frac{1}{2}p$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_3 = \sin\varphi_4 = 1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук вече следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна четириъгълна призма от Задача 7.

Задача 9. Означаваме с $a_1, a_2, \dots, a_n$ дължините на страните на основите, които са n-ъгълници $(n \ge 3)$ с даден периметър P. За тяхното лице B е изпълнено неравенството

$$B \le \frac{1}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2,\ \text{доказано в [5] – задача 7,}$$

а за височината h на призмата имаме $h \le l$. Обемът V на призмата се определя чрез формулата $V = B.h$ и за него е в сила неравенството $V \le \frac{1}{4n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2.\, l$, като равенството се достига само за права призма с основи правилни n-ъгълници $(n \ge 3)$ с дължини на страните $a_1= a_2=\ldots= a_n=\frac{1}{n}P$ и $h = l$. Оттук вече следва, че най-голям обем има тази права n-ъгълна призма, чиито основи са правилни n-ъгълници $(n \ge 3)$ с дължини $\frac{1}{n}P$ на страните и дължина l на височината, т.е. търсената n-ъгълна призма е правилна.

Задача 10. Използваме означенията от решението на предната задача. Лицето S на повърхнината на призмата се определя по формулата $S = 2B + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, където S_1, $S_2,\ldots, S_n$ са лицата на околните стени-успоредници с дължини на страните съответно a_1 и l, a_2 и $l,\ldots,$ a_n и l. Ако $\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n$ са съответните ъгли между тях, то $0^0 < \varphi_1 < 180^0$, $0^0 < \varphi_2 < 180^0$, $0^0 < \varphi_3 < 180^0,\ldots,$ $0^0 < \varphi_n < 180^0$, $0 < \sin\varphi_1 \le 1$, $0 < \sin\varphi_2 \le 1,\ldots, 0 < \sin\varphi_n \le 1$ и имаме $S_1 = a_1.l.\sin\varphi_1 \le a_1.l$, $S_2 = a_2.l.\sin\varphi_2 \le a_2.l,\ldots,$ $S_n = a_n.l.\sin\varphi_n \le a_n.l$. Така получаваме следното неравенство:

$$S \le \frac{1}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2 + (a_1+ a_2 +\ldots+ a_n).l \quad \text{или} \quad S \le \frac{1}{2n}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.P^2 + P.l,$$

като равенството се достига само за призма с основи правилни n-ъгълници с дължини на страните $a_1= a_2=\ldots= a_n=\frac{1}{n}P$ и $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 =,\ldots, = \sin\varphi_n=1$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 90^0$ и околните ръбове са перпендикулярни на основите. Оттук вече следва, че най-голямо лице на повърхнината има същата правилна n-ъгълна $(n \ge 3)$ призма от Задача 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Коларов, Хр. Лесов, Сборник от задачи по геометрия VII–XII клас, Част втора, Издателство „Интеграл”, Добрич, 2015.
2. К. Коларов, Хр. Лесов, Сборник от задачи по стереометрия, Издателство „Интеграл”, Добрич, 2017.
3. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за триъгълник, списание „Математика плюс”, кн. 4, 2013, стр. 48 – 51.
4. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за четириъгълник, списание „Математика плюс”, кн. 4, 2015, стр. 28 –32.
5. Хр. Лесов, Неравенства и екстремални задачи за многоъгълник, списание „Математика плюс”, кн. 1, 2015, стр. 27–31.