ДОСТОЙНО ПРЕДСТАВЯНЕ

(МЛАДЕЖКА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА)

Ирина Шаркова, научен ръководител на националния отбор

Двадесет и първата балканиада по математика за ученици до 15,5 години се проведе в гр. Варна в СОК “Камчия” от 24. до 29. юни 2017 г. В нея взеха участие ученици от 19 отбора от 17 държави: официалните страни-участници Албания, Босна и Херцеговина, България, Гърция, Кипър, Македония, Молдова, Румъния, Сърбия и Черна гора, както и гостите Азербайджан, Казахстан, Саудитска Арабия, Таджикистан, Туркменистан, Филипини и Франция. България, като домакин на състезанието, се представи с три отбора, два национални (първи и втори) и един на града-домакин. След подбор, честта да представляват България на Балканиадата завоюваха учениците:

<u>1. отбор</u>: Светлин Красимиров Лалов (8 клас, София – СМГ), До Виет Кьонг (8 клас, София – СМГ), Стефан Мартинов Хаджистойков (8 клас, София – СМГ), Матей Костадинов Петков (9 клас, София – НПМГ), Борислав Кирилов Кирилов (7 клас, София – ПЧМГ), Михаела Филипова Гледачева (8 клас, София – ПЧМГ);

<u>2. отбор</u>: Мартин Боянов Стефанов (8 клас, СМГ – София, Димитър Николов Николов (8 клас, Варна – МГ „Д-р П. Берон”), Галин Миленов Тотев (8 клас, Бургас – ПМГ), Диян Христинов Димитров (8 клас, София – СМГ), Мартин Даниел Копчев (7 клас, Габрово – ПМГ), Георги Стефанов Златинов (7 клас, Благоевград – ПМГ);

<u>3. отбор</u> (Варна – Бургас): Марк Киричев (8 клас), Калоян Христов Янчев (8 клас), Георги Георгиев Петков (7 клас), Веселина Николаева Иванова (7 клас), Марина Иванова Бояджиева (8 клас), Андрей ИвайловэЦочев (9 клас).

Двата национални отбори в посочените състави бяха избрани след контролни, проведени на 13 и 14 май в Центъра за подготовка на олимпийци, София. До контролните бяха допуснати общо 17 ученици с най-високи резултати от Националната олимпиада: 8 от 8. клас, 7 от 7. клас и 2 от 9. клас. Подготовката и на трите отбора бе проведена в София в Олимпийския център от 4 до 17 юни, в обичайния си формат: всеки ден учениците имаха занятия от 8 до 17 часа, които включваха по три лекции и един матбой или контролно.

Българските участници в Балканиадата се представиха достойно и спечелиха 1 златен, 11 сребърни и 6 бронзови медала. Тази година българският комитет по подбор на задачите беше съставил шортлист, по-труден от обичайното. В резултат на гласуването се получи трудна тема. Ето състезателната тема:

XXI МБОМ, България, 26.06.2017 г.

Задача 1. Намерете всички множества от шест последователни естествени числа такива, че произведението на две от числата, събрано с произведението на други две от тях, да е равно на произведението на останалите две числа.

Задача 2. Нека x, y, z са естествени числа такива, че $x \neq y \neq z \neq x$. Да се докаже, че $(x+y+z)(xy+yz+zx-2) \geq 9xyz$. Кога се достига равенство?

Задача 3. Нека $\triangle ABC$ е остроъгълен и $AB \neq AC$. Около него е описана окръжност k с център O. Точка M е средата на BC, а D е точка от k такава, че $AD \perp BC$. Точката T е такава, че $BDCT$ е успоредник, а точката Q е в една полуравнина с точката A спрямо BC и е такава, че $\measuredangle BQM = \measuredangle BCA;\ \ \measuredangle CQM = \measuredangle CBA$. Правата AO пресича окръжността k за втори път в точка E, а описаната около $\triangle ETQ$ окръжност пресича k в точка $X \neq E$. Да се докаже, че точките A, M и X лежат на една права.

Задача 4. В равнината е даден правилен $2n$-ъгълник $P - A_1A_2...A_{2n}$, където n е естествено число, по-голямо от 1. Казваме, че точката S от страна на P може да се види от точка E, външна за P, ако отсечката SE не съдържа друга точка от P освен S. Оцветяваме страните на P в три цвята (върховете не се оцветяват) така, че всяка страна да е оцветена в точно един цвят и всеки цвят да се използва поне веднъж. Изпълнено е още, че от всяка точка в равнината, външна за P, се виждат страни, оцветени в не повече от два различни цвята. Намерете броя на всички такива различни оцветявания на P (две оцветявания са различни, ако поне една от страните $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{2n}A_1$ е оцветена различно).

Ето кратки решения на задачите, в които са използвани идеи на състезателите от първи отбор.

Задача 1. Това е една лесна задача по теория на числата, на която нашият отбор очаквано завоюва пълните 60 точки. „Подводен камък" в задачата беше, че ако не се направят подходящи ограничения, трябва да се решават 45 квадратни уравнения. Предлагаме решение по идея на Светлин Лалов.

Да означим числата с a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ и $a+5$. Тогава минималната сума на две произведения е $2a^2+6a+2$ и най-голямото произведение на две от числата е $a^2+9a+20$. Имаме $a^2+9a+20 \geq 2a^2+6a+2 \Leftrightarrow (a-6)(a+3) \leq 0 \Rightarrow a \in [-3;6]$. Остава да проверим 6 групи от числа. За да намалим проверките, трябва да съобразим още, че точно две от числата се делят на 3 и следователно те трябва да са в едно и също произведение. Аналогично съобразяваме, че трите четни числа трябва да се комбинират с нечетни. След проверки получаваме следните три решения: 1.2 + 3.6 = 4.5; 2.5 + 3.6 = 4.7; 6.9 + 7.8 = 10.11.

Задача 2. Неравенството не затрудни участниците от 1. отбор. Те представиха 6 различни решения. За съжаление Къни (До Виет Кьонг) беше допуснал глупава техническа грешка, с което беше усложнил задачата. Михаела не беше отговорила точно кога се достига равенство и отборът загуби 8 точки. Предлагаме решение по идея на Михаела Гледачева.

$$x \le y \le z \Rightarrow y = x + a, z = x + a + b \text{ и } a, b \in \mathbb{N},$$

$$\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx-2\right) \ge 9xyz \Leftrightarrow$$

$$\left(3x+2a+b\right)\left(3x^2+4xa+2xb+a^2+ab-2\right) \ge 9x^3+18x^2a+9x^2b+9xa^2+9xab \Leftrightarrow$$

$$2xa^2+2xab+2a^3+2xb^2+3a^2b+ab^2 \ge 6x+4a+2b \Leftrightarrow$$

$$\left(2a^2+2ab+2b^2\right)x+\left(2a^2+2ab\right)a+\left(a^2+ab\right)b \ge 6x+4a+2b$$

Но числата са естествени и следователно $x \ge 1$, $a \ge 1$ и $b \ge 1$. Тогава

$$2a^2+2ab+2b^2 \ge 6, 2a^2+2ba \ge 4 \text{ и } a^2+ab \ge 2.$$

Равенство се достига, когато $a = b = 1$, т.е. когато трите числа са последователни.

Задача 3. Геометрията затрудни повечето участници (нещо, което се наблюдава през последните години). Решението изисква добро познаване на свойствата на забележителните точки в триъгълник, което е основен материал в 8. клас. Нашият отбор завоюва най-малко точки на тази задача. Пълно решение има само Светлин Лалов и то му осигури златния медал. Предлагаме решение по идея на Светлин.

Първо да отбележим, че точката D е симетрична на ортоцентъра H на триъгълника ABC относно правата BC, а точката E е симетрична на ортоцентъра H относно средата на BC (основно свойство на ортоцентъра). Следователно са изпълнени равенствата:

$$HB = BD = CE = CT \text{ и } \measuredangle TCB = \measuredangle ECB = \measuredangle CBD.$$

Това показва, че точките E и T са симетрични относно BC. Нека правата AM пресича окръжността k в точка X_1 . Ще докажем, че тази точка съвпада с точка X. От свойствата на вписани ъгли знаем, че $\measuredangle AX_1B = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle AX_1C = \measuredangle ABC$. Нека точката Q_1 е симетрична на X_1 относно BC. От свойствата на симетрията получаваме, че точките Q_1 и A, са в една полуравнина относно правата BC, $\measuredangle CQ_1M = \measuredangle CX_1M = \measuredangle CBA$ и $\measuredangle MQ_1B = \measuredangle MX_1B = \measuredangle ACB$. Това показва, че $Q \equiv Q_1$, защото и двете точки лежат на окръжностите, описани около $\triangle CMQ$ и $\triangle BMQ$. От свойствата на симетрията имаме още, че четириъгълникът TQX_1E е равнобедрен трапец и следователно е вписан в окръжност. Така получихме, че точка X_1лежи на окръжността описана около $\triangle TQE$ и наk , следователно тя е точка X.

Задача 4. Тази комбинаторна задача, предложена от Македония, се оказан най-трудната в темата. Нито един участник не получи пълен брой точки. Затруднението идваше от това, че обща формула се получава за $n > 3$, а случаите n = 2 и n = 3 трябва да се разгледат отделно. Само двама от всички участници в Балканиадата получиха по 9 точки и това са нашите Борислав Кирилов и Георги Златинов. В решението тук щеследваме идеята на Борислав Кирилов.

Нека първо да разгледаме случая n = 2. Ясно е, че от всяка външна точка се виждат най-много две страни и всяко оцветяване в три цвята изпълнява условието. Ясно е още, че един цвят ще участва 2 пъти и него можем да изберем по 3 начина. Страната, оцветена във втория цвят, може да си избере по 4 начина, а страната в третия цвят – по 3 начина. Следователно оцветяването е по 3.4.3 = 36 начина.

В случая $n = 3$ първо трябва да се прецени колко най-много страни се виждат от външна точка. В правилния $2n$-ъгълник срещуположните страни са успоредни. За да виждаме едновременно две такива страни, не можем да гледаме от точка, която е между успоредните прави, определени от тях. Но ако сме извън тези успоредни прави, също няма как да виждаме и двете страни. Това показва, че от правилния шестоъгълник можем да виждаме едновременно най-много три последователни страни. Следователно всеки три последователни страни са оцветени в два цвята. Да разгледаме две съседни различно оцветени страни. Една от срещуположните им страни е в третия цвят. Ако тя е срещу цвят 1 имаме две възможности, а ако е срещу цвят 2, възможността е една. В първия случай имаме 3.2 начина за избор на двата начални цвята и 2 начина за останалите страни, а във втория имаме 6 начина да изберем първа страна и три начина за цвета ѝ. Така получаваме $3.2.2+6.3=30$ начина.

Да разгледаме $n > 3$. Вече показахме, че няма точка, от която се виждат повече от n страни на многоъгълника. Всеки правилен $2n$-ъгълник е симетричен относно големите си диагонали, което показва, че има точка от симетралата на всеки голям диагонал, от която виждаме n последователни страни. Едно оцветяване ще изпълнява условието на задачата, ако всеки n последователни страни са оцветени в най-много 2 цвята. Нека, без ограничение, измежду страните A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_{n+1} не се среща без ограничение цвят 3. Нека първата страна в цвят 3 е $A_{n+k}A_{n+k+1}$ (по посока A_1, A_2,…A_{2n}). Тогава страните $A_{k+1}A_{k+2}$,…$A_{n+k-1}A_{n+k}$ са точно $n – 1$ на брой и следователно са оцветени в най-много 2 цвята. Но $A_{n+k}A_{n+k+1}$ е първата в цвят 3 и следователно те всичките са в един и същи цвят, например в цвят 1. Ако направим същите разсъждения за цвят 2, започвайки от страната $A_{n+k}A_{n+k+1}$, ще получим, че има още $n – 1$ еднакво оцветени страни. Не е трудно да съобразим, че ако $n – 1$ от страните са в цвят 1, то в цвят 2 и цвят 3 са срещуположните страни от двата им края, а останалите $n – 1$ страни са отново в цвят 1. Повтарящият се цвят може да се избере по 3 начина, а първата от $(n – 1)$-те страни – по $2n$ начина, т.е. общият брой оцветявания е $3.2n = 6n$.

Ето резултатите на първи отбор:

БЪЛГАРИЯ – първи отбор	1	2	3	4	сбор	медал
Светлин Лалов	10	10	10	6	36	златен
Стефан Хаджистойков	10	10	4	7	31	сребърен
Борислав Кирилов	10	10	2	9	31	сребърен
Матей Петков	10	10	0	3	23	сребърен
Михаела Гледачева	10	9	0	3	21	сребърен
До ВиетКъонг	10	3	4	2	19	сребърен
общо	60	52	20	30	162	

Неофициалното отборно класиране се оглавява от:

1. Румъния 196 точки
2. България 1 162 точки
3. Сърбия 158 точки

Вторият български отбор е със 137 точки и се класира на 5. място, а третият отбор е на 10. място.

За доброто представяне на българските ученици трябва да БЛАГОДАРИМ на техните учители, които са ги мотивирали да се занимават сериозно с математика, както и на колегите, които участаха в подготовката на отборите. Предлагаме ви и задачите от двете контролни, с които бяха селектирани българските участници в 21. Младежка балканиада.

ПЪРВО КОНТРОЛНО ЗА МБОМ, 13.05.2017

Задача 1. В $\triangle ABC$ отсечките AA_1 $(A_1 \in BC)$ и BB_1 $(B_1 \in AC)$ са вътрешни ъглополовящи на ъглите с върхове съответно *A* и *B*. Да се намери отношението

$$\measuredangle BAC : \measuredangle ABC : \measuredangle ACB,$$

ако $\measuredangle AA_1B_1 = 24^\circ$ и $\measuredangle BB_1A_1 = 18^\circ$.

Задача 2. Да се реши в цели числа уравнението:

$$25x^2y^2 + 10x^2y + 25xy^2 + x^2 + 30xy + 2y^2 + 5x + 7y + 6 = 0.$$

Задача 3. 100 бланки с номера 00, 01, 02, …99 трябва да се поставят в 1000 кутии с номера 000, 001, 002, …999 (може и повече от една бланка в една кутия), като номерът на бланката трябва да се получава от номера на кутията, в която се поставя, чрез зачертаване на една цифра. В колко най-малко кутии могат да се поставят бланките?

Задача 4. Квадрат $n \times n$ е разделен на n^2 единични клетки и във всяка клетка е поставена по една пионка. В даден момент пионките се преместват едновременно в съседни клетки. (Две клетки са съседни, ако имат обща страна.) В една клетка могат да попаднат повече от една пионка. Колко най-много и колко най-малко са празните клетки след преместването, ако:

а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 7$?

ВТОРО КОНТРОЛНО ЗА МБОМ, 14.05.2017

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа *a*, *b*, *c* и *d*, които удовлетворяват равенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 13.4^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Задача 2. Вписаната окръжност *k* в $\triangle ABC$ със страни $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ се допира до страните $AB,\ BC$ и AC съответно в точките $C_1,\ A_1$ и B_1. Точка *K* от *k* е диаметрално противоположна на точка C_1, а $C_1A_1 \cap KB_1 = N$ и $C_1B_1 \cap KA_1 = M$. Изразете отсечката *MN* чрез страните на триъгълника.

Задача 3. Да се докаже, че ако *m*, *n*, *p* и *q* са положителни числа, то

$$\frac{m}{t+n+p+q} + \frac{n}{t+p+q+m} + \frac{p}{t+q+m+n} + \frac{q}{t+m+n+p} \ge \frac{4}{5},$$

където $t = \dfrac{m+n+p+q}{2}$.

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа, които имат 6 делителя (без единицата и самото число) и сборът на тези делители е 14 133.