М+ДЕСЕТ ЗАДАЧИ ЗА...

ТЕОРЕМА НА ЛАЙБНИЦ ЗА ТРИЪГЪЛНИК И НЕЙНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Христо Лесов, гр. Казанлък

Нека в триъгълник ABC точките M, N и P са средите съответно на страните BC, AC и AB, а техните дължини са съответно a, b и c. Съгласно известната теорема от училище, медианите AM, BN и CP се пресичат в една точка G, като $AG = 2GM$, $BG = 2GN$ и $CG = 2GP$. Точката G се нарича медицентър (център на тежестта) на ΔABC.

1. <u>*Теорема на Лайбниц*</u>: За медицентъра G на ΔABC и произволна точка Q от равнината му е изпълнено равенството $AQ^2+BQ^2+CQ^2=3QG^2+AG^2+BG^2+CG^2$.

2. За медицентъра G на ΔABC и произволна точка Q от равнината му е изпълнено равенството $QG^2=\frac{1}{3}\left(AQ^2+BQ^2+CQ^2\right)-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

3. Точката Q от равнината на ΔABC е негов медицентър тогава и само тогава, когато $AQ^2+BQ^2+CQ^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

4. От всички точки в равнината на даден ΔABC неговият медицентър G има най-малък сбор от квадратите на разстоянията до A, B и C.

5. Множеството от точките в равнината на даден ΔABC, за които сборът от квадратите на разстоянията до A, B и C има постоянна стойност d^2, е окръжност с център медицентъра G на ΔABC и радиус $\frac{1}{3}\sqrt{3d^2-(a^2+b^2+c^2)}$.

6. Ако продълженията на медианите AM, BN и CP на ΔABC пресичат описаната около него окръжност (k) съответно в точките A_1, B_1 и C_1, то е в сила равенството

$$\frac{AG}{GA_1}+\frac{BG}{GB_1}+\frac{CG}{GC_1}=3.$$

7. В окръжност (k) с център O и радиус R е вписан ΔABC. Да се определи множеството от точките Q, вътрешни за ($к$), за които е изпълнено равенството

$$\frac{AQ}{QA_1}+\frac{BQ}{QB_1}+\frac{CQ}{QC_1}=3\ = 3,$$

където A_1, B_1, C_1 са съответните пресечни точки на правите AQ, BQ, CQ и окръжността (k).

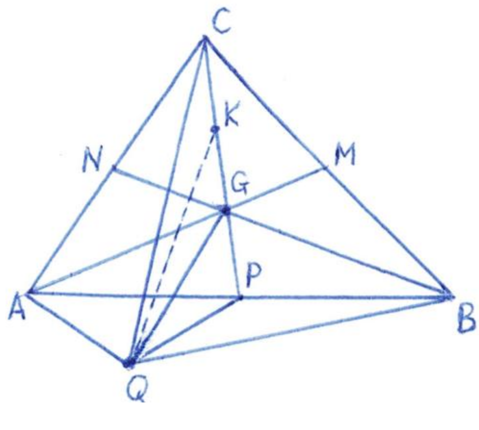
8. Дадени са ΔABC и права m, които нямат общи точки . Да се намери точка от m, за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B и C е най-малък.

9. Дадени са ΔABC и окръжност ($\varkappa$) с център O, които нямат общи точки. Да се намери точка от ($\varkappa$), за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B и C е най-малък.

10. Дадени са ΔABC и окръжност ($\varkappa$) с център O, които нямат общи точки. Да се намери точка от ($\varkappa$), за която сборът от квадратите на разстоянията до A, B и C е най-голям.

Отговори, упътвания, решения

1. Ще използваме известната формула за изразяване на медиана в триъгълник чрез страните му. От ΔABQ, в който QP е медиана към AB, имаме:



$4QP^2 = 2(AQ^2 + BQ^2) - AB^2$ и стигаме до равенството

(1) $AQ^2+BQ^2=2QP^2+\frac{1}{2}AB^2$.

Аналогично от ΔABG, в който $GP=\frac{1}{2}CG$ е медиана към AB, имаме

$AG^2 + BG^2 = 2GP^2+\frac{1}{2}AB^2$ или

(2) $AG^2 + BG^2=\frac{1}{2}CG^2+\frac{1}{2}AB^2$.

След почленно изваждане на равенствата (1) и (2) получаваме

(3) $AQ^2 + BQ^2 = AG^2 + BG^2 + 2QP^2 - \frac{1}{2}CG^2$.

Ако K е средата на CG, то $CK = KG = GP$ и от ΔKPQ, в който QG е медиана към $KP = CG$, имаме $QP^2 + QK^2 = 2QG^2 + \frac{1}{2}KP^2$ или $2QP^2 + 2QK^2 = 4QG^2 + CG^2$, а от ΔCGQ, в който QK е медиана към CG, по същия начин имаме $CQ^2 + QG^2 = 2QK^2 + \frac{1}{2}CG^2$, откъдето изразяваме $2QK^2 = CQ^2 + QG^2 - \frac{1}{2}CG^2$. Заместваме в предното равенство и получаваме $2QP^2 + CQ^2 + QG^2 - \frac{1}{2}CG^2 = 4QG^2 + CG^2$ или $2QP^2 = 3QG^2 + \frac{3}{2}CG^2 - CQ^2$, а след заместване в (3) стигаме до равенството на Лайбниц.

2. От теоремата на Лайбниц имаме

$QG^2 = \frac{1}{3}\left(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2\right) - \left(AG^2 + BG^2 + CG^2\right)$ и като вземем пред вид, че

$$AG = \frac{2}{3}AM,\ BG = \frac{2}{3}BN \text{ и } CG = \frac{2}{3}CP,$$

получаваме $QG^2 = \frac{1}{3}\left(AQ^2 + BQ^2 + CQ^2\right) - \frac{4}{9}\left(AM^2 + BN^2 + CP^2\right)$. Остава да приложим формулата за изразяване на медианите AM, BN и CP чрез дължините a, b и c на страните на ΔABC.

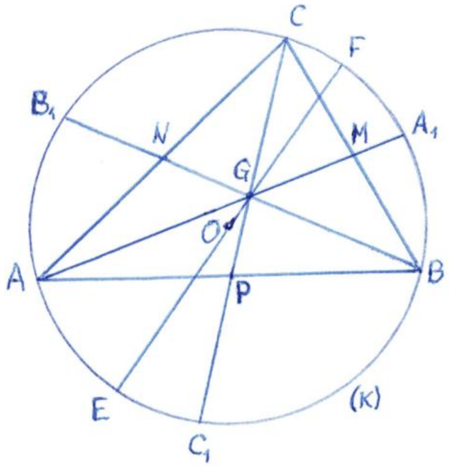
3. Следва от **2.** при $Q = G$, т.е. $QG = 0$.

4. Тъй като $QG^2 \geq 0$, от резултата в **2.** следва, че

$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 \geq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ и равенството е само за $Q = G$, което означава, че най-малката стойност на сбора $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$ е $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ и тя се достига само за медицентъра G на ΔABC.

5. По условие $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = d^2$, а чрез резултата в **2.** имаме $QG^2 = \frac{1}{3}d^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ или $QG = \frac{1}{3}\sqrt{3d^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ и следва търсеното.

6. Нека O е центърът на описаната около ΔABC окръжност (k) с радиус R, а E и F са пресечните точки на правата OG и (k).



Тогава са в сила равенствата

$$AG.GA_1 = BG.GB_1 = CG.GC_1 = EG.GF = (R + OG).(R - OG) = R^2 - OG^2$$

и даденото равенство приема вида

$$\frac{AG}{GA_1} + \frac{BG}{GB_1} + \frac{CG}{GC_1} = \frac{AG^2}{AG.GA_1} + \frac{BG^2}{BG.GB_1} + \frac{CG^2}{CG.GC_1} = \frac{AG^2 + BG^2 + CG^2}{R^2 - OG^2} = 3 \text{ или}$$

$AG^2 + BG^2 + CG^2 = 3(R^2 - OG^2)$. От теоремата на Лайбниц при $Q = O$ имаме

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 3OG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 .$$

Тъй като $AO = BO = CO = R$, получаваме $AG^2 + BG^2 + CG^2 = 3R^2 - 3OG^2$ и по този начин стигаме до желания резултат.

7. От резултата в предната задача става ясно, че точката G принадлежи на търсеното множество. А тъй като при $Q = O$ имаме

$$AO = OA_1 = BO = OB_1 = CO = OC_1 = R$$

и всяка от дробите в даденото равенство е равна на 1, следва, че и точката O е от това множество. Ако правата OQ пресича окръжността (k) в точките E_1 и F_1, тогава имаме

$$AQ.QA_1 = BQ.QB_1 = CQ.QC_1 = E_1Q.Q\,F_1 = \left(R + OQ\right).\left(R - OQ\right) = R^2 - OQ^2$$

и даденото равенство приема вида

$$\frac{AQ}{QA_1} + \frac{BQ}{QB_1} + \frac{CQ}{QC_1} = \frac{AQ^2}{AQ.QA_1} + \frac{BQ^2}{BQ.QB_1} + \frac{CQ^2}{CQ.QC_1} = \frac{AQ^2 + BQ^2 + CQ^2}{R^2 - OQ^2} = 3$$

или

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = 3\left(R^2 - OQ^2\right).$$

От теоремата на Лайбниц имаме равенството

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = 3QG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2$$

и като вземем пред вид резултата от **6.**, стигаме до

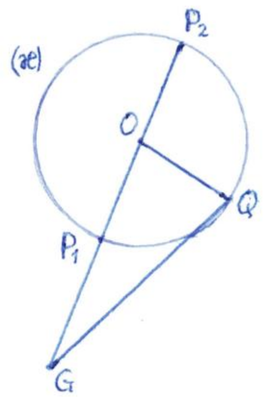
$3\left(R^2 - OQ^2\right) = 3QG^2 + 3\left(R^2 - OG^2\right)$ или $OQ^2 + QG^2 = OG^2$. От обратната теорема на Питагор следва, че ъгълът OQG е прав и точката Q принадлежи на окръжността с диаметър $OG < R$. Затова тази окръжност лежи вътре в окръжността (k). Нека сега Q е точка от окръжността с диаметър OG. Тогава Q е вътрешна за окръжността (k) и $OQ^2 + QG^2 = OG^2$, т.е. $QG^2 + R^2 - OG^2 = R^2 - OQ^2$. Чрез това равенство и теоремата на Лайбниц, както по-горе имаме:

$$\frac{AQ}{QA_1} + \frac{BQ}{QB_1} + \frac{CQ}{QC_1} = \frac{AQ^2 + BQ^2 + CQ^2}{R^2 - OQ^2} = \frac{3QG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2}{R^2 - OQ^2} = \frac{3QG^2 + 3(R^2 - OG^2)}{R^2 - OQ^2} = 3$$

така, че точките от окръжността с диаметър OG изпълняват условието на задачата и вече следва, че тази окръжност е търсеното множество.

8. Нека G е медицентърът на ΔABC, а Q е точка от дадената права m. От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$ е най-малък, когато отсечката QG има най-малка дължина. Тя се достига, когато $QG \perp m$, т.е. търсената точка е петата на перпендикуляра от G към правата m.

9. Нека G е медицентърът на ΔABC, а Q е точка от дадената окръжност ($\varkappa$). От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$ е най-малък, когато отсечката QG има най-малка дължина. Ако отсечката GO пресича ($\varkappa$) в точка P_1, от ΔGOQ имаме $OQ + QG \geq OG$ или $OQ + QG \geq OP_1 + P_1G$, т.е. $QG \geq P_1G$, понеже $OQ = OP_1$ – радиуси на окръжността ($\varkappa$). Следователно търсената точка е P_1.



10. Нека G е медицентърът на ΔABC, а Q е точка от дадената окръжност ($\varkappa$). От теоремата на Лайбниц следва, че сборът $AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$ е най-голям, когато отсечката QG има най-голяма дължина. Ако продължението на отсечката GO пресича ($\varkappa$) в точка P_2 – диаметрално противоположната на P_1 (вж. чертежа по-горе), от ΔGOQ имаме: $QG \leq OG + OQ$ или $QG \leq OG + OP_2$, т.е. $QG \leq P_2G$, понеже $OQ = OP_2$ – радиуси на окръжността ($\varkappa$). Следователно търсената точка е P_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Паскалев, Ив. Чобанов, Забележителни точки в триъгълника, издателство Народна просвета, София, 1985 г.

2. Хр. Лесов, М+десет задачи за екстремални разстояния, списание „Математика плюс, кн. 3, 2005 г., стр. 22-23.

3. Хр. Лесов, М+десет задачи за медицентър на триъгълник, списание „Математика плюс, кн. 3, 2010 г., стр. 58-59.