ЕДНА „ПОЛЕЗНА” ЗАДАЧА

д-р Хари Алексиев

Водено от желанието да бъде полезно на ученици, учители и студенти, списанието предлага на своите читатели рубриката “Една задача + много решения”, която включва най-разнообразни задачи: урочни, олимпиадни, конкурсни. Целта е да бъде разкрита историята на съответната задача, да се разбере как тя е била замислена, да се осъзнае идеята за нейното съставяне и да се осъществи докосване до потенциала на възможните ѝ приложения. Един от начините за това е чрез намиране на различни решения. Търсенето на поне едно решение се превръща в “мисловен алпинизъм”, заради неусетната поява на желание за откриване на повече решения.

Искрено се надяваме, че подобно предизвикателство ще мотивира читателя за активна самостоятелна работа и той ще се включи в рубриката със свои предложения.

Очакваме писмата Ви на адреса на редакцията до д-р Хари Алексиев, който води рубриката.

Пожелаваме Ви приятни занимания!

Ще предложа една задача от Националния кръг на Международното математическото състезание „Европейско кенгуру“ – 2010 г. за 5-6 клас. Същата ми беше изпратена от Любомир Любенов на 26.06.2012 с предложени две решения и питане дали мога да открия други решения. Задачата е следната:

Да се пресметне сумата

$$S=\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}+\frac{1}{10.13.16}+\frac{1}{13.16.19}+$$

$$+\frac{1}{16.19.22}+\frac{1}{19.22.25}$$

Ще предложа няколко решения (първите две са споменатите по-горе).

Решение 1. От тъждеството

$$\frac{1}{(x-3).x.(x+3)}=\frac{\frac{1}{18}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{9}}{x}+\frac{\frac{1}{18}}{x+3} \quad \text{за всяко}$$

$$x\neq 0, x\neq \pm 3$$

получаваме

$$\frac{1}{4.7.10}=\frac{\frac{1}{18}}{4}+\frac{-\frac{1}{9}}{7}+\frac{\frac{1}{18}}{10}$$

$$\frac{1}{7.10.13}=\frac{\frac{1}{18}}{7}+\frac{-\frac{1}{9}}{10}+\frac{\frac{1}{18}}{13}$$

$$\frac{1}{10.13.16}=\frac{\frac{1}{18}}{10}+\frac{-\frac{1}{9}}{13}+\frac{\frac{1}{18}}{16}$$

$$\frac{1}{13.16.19}=\frac{\frac{1}{18}}{13}+\frac{-\frac{1}{9}}{16}+\frac{\frac{1}{18}}{19}$$

$$\frac{1}{16.19.22}=\frac{\frac{1}{18}}{16}+\frac{-\frac{1}{9}}{19}+\frac{\frac{1}{18}}{22}$$

$$\frac{1}{19.22.25}=\frac{\frac{1}{18}}{19}+\frac{-\frac{1}{9}}{22}+\frac{\frac{1}{18}}{25}$$

Оттук

$$s_1=\frac{\frac{1}{18}}{1}=\frac{1}{18}$$

$$s_2=\frac{-\frac{1}{9}}{4}+\frac{\frac{1}{18}}{4}=-\frac{1}{72}$$

$$s_3=\frac{\frac{1}{18}}{7}+\frac{-\frac{1}{9}}{7}+\frac{\frac{1}{18}}{7}=0$$

$$s_4=\frac{\frac{1}{18}}{10}+\frac{-\frac{1}{9}}{10}+\frac{\frac{1}{18}}{10}=0$$

$$s_5=\frac{\frac{1}{18}}{13}+\frac{-\frac{1}{9}}{13}+\frac{\frac{1}{18}}{13}=0$$

$$s_6=\frac{\frac{1}{18}}{16}+\frac{-\frac{1}{9}}{16}+\frac{\frac{1}{18}}{16}=0$$

$$s_7=\frac{\frac{1}{18}}{19}+\frac{-\frac{1}{9}}{19}+\frac{\frac{1}{18}}{19}=0$$

$$s_8 = \frac{\frac{1}{18}}{22} + \frac{-\frac{1}{9}}{22} = \frac{-\frac{1}{18}}{22} = -\frac{1}{18.22}$$

$$s_9 = \frac{\frac{1}{18}}{25} = \frac{1}{18.25}$$

Тогава

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9$$

$$S = \frac{1}{18} - \frac{1}{72} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{1}{18.22} + \frac{1}{18.25}$$

$$S = \frac{1}{18}\left(1 + \frac{1}{25}\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{22}\right)$$

$$S = \frac{26}{18}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4.22}\right) = \frac{26.63}{4.18.22.25} = \frac{13.7}{4.25.22} = \frac{91}{2200}$$

Решение 2. От представянето

$$\frac{1}{(x-3).x.(x+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{(x+3)-(x-3)}{(x-3).x.(x+3)}\right) = \frac{1}{6.(x-3).x} - \frac{1}{6.x.(x+3)}$$

имаме, че

$$\frac{1}{1.4.7} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1.4} - \frac{1}{4.7}\right)$$

$$\frac{1}{4.7.10} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4.7} - \frac{1}{7.10}\right)$$

$$\frac{1}{7.10.13} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{7.10} - \frac{1}{10.13}\right)$$

$$\frac{1}{10.13.16} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10.13} - \frac{1}{13.16}\right)$$

$$\frac{1}{13.16.19} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{13.16} - \frac{1}{16.19}\right)$$

$$\frac{1}{16.19.22} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{16.19} - \frac{1}{19.22}\right)$$

$$\frac{1}{19.22.25} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{19.22} - \frac{1}{22.25}\right).$$

Събирайки, получаваме $S = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1.4} - \frac{1}{22.25}\right) = \frac{546}{4.6.22.25} = \frac{91}{2200}$.

Ето и други решения:

Решение 3. (Сръчност) Извършваме следното групиране

$$S = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.10} + \frac{1}{10.13}\right) + \frac{1}{13}\left(\frac{1}{10.16} + \frac{1}{16.19}\right) + \frac{1}{19}\left(\frac{1}{16.22} + \frac{1}{22.25}\right)$$

Тогава

$$S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{40}+\frac{1}{130}\right)+\frac{1}{13.16}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{19.22}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\right)$$

$$S=\frac{1}{7}\left(\frac{11}{40}+\frac{1}{130}\right)+\frac{1}{13.16}\left(\frac{29}{190}\right)+\frac{1}{19.22}\left(\frac{41}{16.25}\right)$$

$$S=\frac{1}{70}\left(\frac{11}{4}+\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{13.16}\left(\frac{29}{190}\right)+\frac{1}{19.22}\left(\frac{41}{16.25}\right)$$

$$S=\frac{147}{4.7.10.13}+\frac{29}{10.13.16.19}+\frac{41}{16.19.22.25}$$

$$S=\frac{21}{4.10.13}+\frac{29}{10.13.16.19}+\frac{41}{16.19.22.25}$$

$$S=\frac{1}{10.13}\left(\frac{21}{4}+\frac{29}{16.19}\right)+\frac{41}{16.19.22.25}$$

$$S=\frac{1}{4.10.13}\left(21+\frac{29}{76}\right)+\frac{1}{19.22}.\frac{41}{16.25}$$

$$S=\frac{1625}{4.10.13.4.19}+\frac{1}{19.22}.\frac{41}{16.25}$$

$$16.19.S=\frac{1625}{10.13}+\frac{41}{22.25}$$

$$10.16.19.S=\frac{1625}{13}+\frac{41}{55}=\frac{89375}{5.11.13}=\frac{6916}{5.11}$$

$$10.16.S=\frac{364}{5.11}$$

$$S=\frac{91.4}{10.55.4.4}=\frac{91}{2200}$$

Решение 4. (Стъпка по стъпка) Имаме

$$s_2=\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}=\frac{1}{4.7}\left(1+\frac{1}{10}\right)=\frac{11}{4.7.10}$$

$$s_3=s_2+\frac{1}{7.10.13}=\frac{11}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}=\frac{1}{7.10}\left(\frac{11}{4}+\frac{1}{13}\right)=\frac{21}{4.10.13}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{1}{10.13.16} = \frac{21}{4.10.13} + \frac{1}{10.13.16} = \frac{1}{10.13}\left(\frac{21}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{17}{2.13.16}$$

$$s_5 = s_4 + \frac{1}{13.16.19} = \frac{17}{2.13.16} + \frac{1}{13.16.19} = \frac{1}{13.16}\left(\frac{17}{2} + \frac{1}{19}\right) = \frac{25}{2.16.19}$$

$$s_6 = s_5 + \frac{1}{16.19.22} = \frac{25}{2.16.19} + \frac{1}{16.19.22} = \frac{1}{16.19}\left(\frac{25}{2} + \frac{1}{22}\right) = \frac{69}{11.8.19}$$

$$s_7 = s_6 + \frac{1}{19.22.25} = \frac{69}{11.8.19} + \frac{1}{19.22.25} = \frac{1}{19.22}\left(\frac{69}{4} + \frac{1}{25}\right) = \frac{1729}{4.22.19.25} = \frac{91}{2200}.$$

Решение 5. Нека

$$S = \frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \frac{1}{10.13.16} + \frac{1}{13.16.19} + \frac{1}{16.19.22} + \frac{1}{19.22.25}$$

Очевидно е, че $HOK = 2^5.5^2.7.11.13.19$. Нека $P = 2^5.5^2 = 800$. Тогава

$$P.S = \frac{200}{7} + \frac{20}{7} + \frac{80}{7.13} + \frac{5}{13} + \frac{50}{13.19} + \frac{25}{11.19} + \frac{16}{11.19}$$

$$P.S = \frac{220}{7} + \frac{80}{7.13} + \frac{5}{13} + \frac{50}{13.19} + \frac{41}{11.19}$$

$$P.S = \frac{220}{7} + \frac{5}{13}\left(\frac{16}{7} + 1\right) + \frac{1}{19}\left(\frac{50}{13} + \frac{41}{11}\right)$$

$$P.S = \frac{220}{7} + \frac{5.23}{7.13} + \frac{1}{19}.\frac{1083}{11.13}$$

$$P.S = \frac{220}{7} + \frac{5.23}{7.13} + \frac{57}{11.13}$$

$$P.S = \frac{220}{7} + \frac{1}{13}\left(\frac{115}{7} + \frac{57}{11}\right) = \frac{220}{7} + \frac{1}{13}.\frac{1664}{7.11}$$

$$800.S = \frac{220}{7} + \frac{128}{7.11}$$

Делейки на 4, получаваме $200.S = \frac{55}{7} + \frac{32}{7.11} = \frac{1}{7}\left(55 + \frac{32}{11}\right) = \frac{1}{7}.\frac{637}{11} = \frac{91}{11}$.

Следователно, $S = \frac{91}{2200}$.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007, ISBN978-954-92139-1-1.