ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Росица Петрова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+583. Да се намери при кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$ax^3+\left(a^2-a+1\right)x^2+\left(2a^2+a-1\right)x+2a^3-2a^2=0$$

има три различни реални корена.

(Росен Николаев, гр. Варна)

М+584. Дадена е системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=a^2, \\ y^2+yz+z^2=b^2, \\ z^2+zx+x^2=a^2-ab+b^2, \end{array}\right.$$

където $a>b>0$.

а) Ако x_0, y_0 и z_0 са положителни числа, при които $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ е решение на системата, да се докаже, че $z_0x_0=y_0^2$.

б) Ако x_0, y_0 и z_0 са реални числа, при които $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ е решение на системата, да се докаже, че $z_0x_0=y_0^2$.

в) Да се реши системата.

(Тодор Митев, гр. Русе)

М+585. След извършване на степенуването в израза $\left(1+x+x^2+\dots+x^{2017}\right)^3$ и сумиране на подобните едночлени пред x^k се получава коефициент C_k $\left(k=0,1,2,\dots,6051\right)$. Да се пресметне сумата $\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots+\frac{1}{C_{2017}}$.

(Сава Гроздев, гр. София,
Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+586. Остроъгълният триъгълник ABC е вписан в окръжност Γ с център O. Точките M и N лежат съответно върху страните AC и BC така, че са изпълнени равенствата $\sphericalangle MON = \sphericalangle AOB$ и $\frac{AM}{MO} = \frac{BN}{NO}$.

а) Да се определи разстоянието от точката O до правата MN.

б) Ако E и F са средите съответно на отсечките AN и BM, да се докаже, че $EF > \frac{1}{2} MN$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+587. Височината на трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ има дължина h. Външните за $ABCD$ точки K, L, M и N са такива, че $\sphericalangle CBK = \sphericalangle CDL = \sphericalangle ADM = \sphericalangle ABN = 15^\circ$ и $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCL = \sphericalangle DAM = \sphericalangle BAN = 75^\circ$. Ако правата LN е перпендикулярна на основите на трапеца и лицето на четириъгълника $KLMN$ е два пъти по-малко от лицето на $ABCD$, да се намери дължината на средната основа на трапеца $ABCD$.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+588. Правилна шестоъгълна пирамида се разделя на две тела от равнина α, минаваща през ръб на основата и средната отсечка на срещуположната му околна стена. Да се намери отношението на обемите на получените тела.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.06.2018 г.