М + НАЙ-МАЛКИТЕ

ДА ПОГОВОРИМ ЗА $n!$

Четиво за 6 – 7 клас

Здравейте, млади любители на математиката!

Предполагам, че всички познавате краткия запис на произведението на всички естествени числа от 1 до n, а именно $1.2.3\ldots.n = n!$ (четем n факториел). Разбира се, използвайки този запис, можем да запишем и произведението на числата от дадено число k, което е по-малко от n, до n. Имаме $k.(k+1)\ldots.n = \dfrac{1.2.\ldots.(k-1)k\ldots n}{1.2\ldots(k-1)} = \dfrac{n!}{(k-1)!}$.

Обикновено свързваме $n!$ с комбинаторни задачи, но този запис може да се използва и в много задачи по алгебра.

Задача 1. Дадени са естествените числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, които са съответно пропорционални на 1, 2, 3,…, 2018. Ако $\dfrac{x_1.x_2\ldots x_{2018}}{3^{2018}} = 2018!$, намерете сбора на дадените числа.

Решение: За да намерим сбора на дадените числа, трябва да открием коефициента k на пропорционалност. От условието следва, че $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2018}$. Имаме:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \ldots = \frac{x_{2018}}{2018} = k \Rightarrow x_1 = k,\ \ x_2 = 2k, \ldots,\ \ x_{2018} = 2018k .$$

Да заместим в условието: $\dfrac{x_1.x_2\ldots x_{2018}}{3^{2018}} = \dfrac{k.k.2.k.3\ldots k.2018}{3^{2018}} = \dfrac{k^{2018}.2018!}{3^{2018}} = 2018!$. Оттук намираме, че $\dfrac{k^{2018}}{3^{2018}} = 1 \Rightarrow k = 3$.

Търсената сума е

$$3+6+9+\ldots+6054 = 3(1+2+3+\ldots+2018) = 3\cdot\frac{(1+2018).2018}{2} = 3.2019.1009 = 6\ 220\ 539.$$

Задача 2. Сравнете числата $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{2017}{2018!}$ и 1.

Решение: Когато решаваме задачи с много събираеми, добре е да разгледаме кое е общото в събираемите. Не е трудно да забележим, че всяка дроб е от вида $\dfrac{n-1}{n!}$, а едно такова число може да се запише по сления начин: $\frac{n-1}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}$. Да се върнем към условието, прилагайки резултата от наблюдението:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2017}{2018!}=\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{2017}{2017!}-\frac{1}{2017!}+\frac{2018}{2018!}-\frac{1}{2018!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{1}{2016!}-\frac{1}{2017!}+\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!}=1-\frac{1}{2018!}<1$$

Задача 3. Намерете най-малкото естествено число *n*, за което числото $(n+10)!$ завършва на 218 нули повече отколкото числото $n!$.

Решение: Броят на нулите в едно произведение зависи от броя на множителите, които се делят на 2 и броя на множителите, които се делят на 5. Тъй като в естествения ред на числата всяко второ число е четно, а всяко пето се дели на 5, то броят на нулите зависи от броя на множителите, които се делят на 5 (те се срещат по-рядко). Разликата в броя на нулите, на които завършват числата $(n+10)!$ и $n!$, се определя от броя на нулите, на които завършва произведението $(n+1).(n+2)...(n+10)$. Това произведение се състои от десет множителя, които са десет последователни естествени числа. Търсим най-малкото *n*, за което числото $(n+1).(n+2)...(n+10)$ се дели на 5^{218}. Тъй като точно два от десетте множителя се делят на 5, то най-малкото *n* е в случая, когато най-големият множител е равен на 5^{217}, т.е. $n+10=5^{217}\Rightarrow n=5^{217}-10$.

Задача 4. Намерете всички естествени числа *a, b, c, d* и *e*, за които $a!+b!+c!+d!=e!$.

Решение: Нека без ограничение наредим числата $a\le b\le c\le d<e$, като последното неравенство следва от условието. Тогава е изпълнено $e\ge d+1\Rightarrow e!\ge(d+1)d!$. Ако $d\ge4\Rightarrow e!\ge5d!>4d!\ge a!+b!+c!+d!$, откъдето $e!>a!+b!+c!+d!$ и следователно задачата няма решение, т.е. няма такива числа. Ако $d=3\Rightarrow 3.d!\ge a!+b!+c!$. Получихме, че $e!=a!+b!+c!+d!\le 4.d!\Rightarrow e\le4$. Не е трудно сами да проверите, че единственото решение е при $a=b=c=d=3$.

Опитайте сами!

Задача 5. Намерете всички естествени числа *a, b, c, d, e* и *f*, за които $a!+b!+c!+d!+e!=f!$.

Задача 6. Намерете всички естествени числа *a, b* и *c,* за които $a!+2017b!=c!$.

Задача 7. Сравнете числата $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}$ и $\frac{1}{2}$.

<u>*Упътване*</u>: Докажете и използвайте равенството $n!+(n+1)!+(n+2)!=n!(n+2)^2$.

Задача 8. Докажете, че числото $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2018}\right).2018!$ е цяло и се дели на 2019.

Автор на четивото: Ирина Шаркова, учител в ПЧМГ