M+ ПОДГОТОВКА

ФАКТОРИЗАЦИЯ И ЕЛЕМЕНТАРНИ ТЪЖДЕСТВА ЗА РЕШАВАНЕ НА ОЛИМПИЙСКИ ЗАДАЧИ (подготовка за младежката балканиада)

Навид Сафаеи, изследовател
Шарифски Технологичен Университет – Техеран, Иран

Задача 1. Ако $x+\sqrt{xy}+y=9$ и $x^2+xy+y^2=27$, да се намери стойността на израза $x-\sqrt{xy}+y$.

Решение: Да забележим, че

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$$

и оттук $x-\sqrt{xy}+y=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+\sqrt{xy}+y}=\dfrac{27}{9}=3$.

Задача 2. **(Сингапурска олимпиада 2012 г.)** Нека $a,\ b,\ c,\ d$ са различни цели числа, за които $a+b+c+d=0$. Ако

$$96\,100<M=(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)<98\,000,$$

намерете стойността на M.

Решение: Тъй като $a+b=-(c+d)$, то $(a+b)^3=-(c+d)^3$. Тогава

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3-d^3-3cd(c+d)=$$

$$=-c^3-d^3+3cd(-c-d)=-c^3-d^3+3cd(a+b).$$

Следователно $a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+b)(cd-ab)$. По-нататък ще използваме, че $d=-a-b-c$. Имаме:

$$a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=-3(a+b)(a+c)(b+c).$$

От получените 2 равенства получаваме $ab-cd=(a+c)(b+c)$ в случай, че $a+b\neq 0$. Ако $a+b=0$, т.е. $b=-a$, то $c+d=0$, т.е. $d=-c$. Тогава, от една страна $ab-cd=-a^2+c^2$, а от друга $(a+c)(b+c) = ab+ac+bc+c^2 = -a^2+ac-ac+c^2 = c^2-a^2$ и отново $ab-cd=(a+c)(b+c)$. По-нататък да забележим, че в условието $a+b+c+d=0$ числата $a,\ b,\ c,\ d$ участват равноправно. Цикличната замяна в полученото равенство $ab-cd=(a+c)(b+c)$ води до още две равенства:

$$bc-ad=(a+b)(a+c) \text{ и } ac-bd=(a+b)(b+c).$$

Тогава $M=(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2$ и заключаваме, че M е точен квадрат. Ще използваме, че произведението $(a+b)(a+c)(b+c)$ е четно, защото ако допуснем противното, ще излезе, че всеки от трите множителя е нечетен. Значи a и b, както a и c, са с различна четност. Но тогава b и с са с еднаква четност и третият множител $(b+c)$ е четен, което противоречи на допускането. Получаваме, че наистина $(a+b)(a+c)(b+c)$ е четно число. По-нататък имаме: $96100=310^2$ и $98000=(140\sqrt{5})^2$. Но $140\sqrt{5}\approx 313$ и следователно четният точен квадрат M е строго между 310^2 и 314^2 . Това е възможно само ако

$$M=\ 312^2=97344 \text{ , което е отговорът на задачата.}$$

Възможна реализация на условията в задачата имаме при $a=18,\ b=-5,\ c=6,\ d=-19$.

Задача 3. (Беларуска олимпиада 1996 г.) Ако реалните числа $x,\ y,\ z$ са различни помежду си и $x^2-y=y^2-z=z^2-x$, да се намери стойността на израза

$$(x+y+1)(y+z+1)(z+x+1).$$

Решение: От условието последователно получаваме:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=y-z \text{ , т.е. } (x-y)(x+y)=y-z;$$

$$y^2-z^2=(y-z)(y+z)=z-x \text{ , т.е. } (y-z)(y+z)=z-x;$$

$$z^2-x^2=(z-x)(z+x)=x-y \text{ , т.е. } (z-x)(z+x)=x-y.$$

Към левите и десните страни на трите равенства прибавяме съответно $x-y$, $y-z$ и $z-x$:

$$(x-y)(x+y+1)=x-z\ ,$$

$$(y-z)(y+z+1)=y-x,$$

$$(z-x)(z+x+1)=z-y.$$

Умножаваме трите равенства и след съкращаване стигаме до

$$(x+y+1)(y+z+1)(z+x+1)=1.$$

Задача 4. (Беларуска олимпиада 2006 г.) Ако $x,\ y,\ z > 1$ и

$$\begin{cases} xy^2 - y^2 + 4xy + 4x - 4y = 4004 \\ xz^2 - z^2 + 6xz + 9x - 6z = 1009 \end{cases},$$

Намерете стойността на израза $xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z$.

Решение: Нека $A = xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z$. Тогава

$A - 6 = (x-1)(y+2)(z+3)$ и системата може да се запише във вида:

$$\begin{cases} xy^2 - y^2 + 4xy + 4x - 4y - 4 = 4000 \\ xz^2 - z^2 + 6xz + 9x - 6z - 9 = 1000 \end{cases}.$$

Оттук

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)^2 = 4000 \\ (x-1)(z+3)^2 = 1000 \end{cases}.$$

Тогава $(A-6)^2 = (x-1)^2(y+2)^2(z+3)^2 = (x-1)(y+2)^2.(x-1)(z+3)^2$ и следователно
$(A-6)^2 = 4000.1000 = 4000000$. Оттук $A - 6 = \pm 2000$. Но $A - 6 > 0$ $(x,\ y,\ z > 1)$, т.е. $A > 6$ и следователно $A = 2006$.

Задача 5. Ако $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, да се докаже, че

$$\left(\frac{a^2-bc}{b+c} + \frac{b^2-ac}{c+a} + \frac{c^2-ab}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a^2-bc} + \frac{c+a}{b^2-ac} + \frac{a+b}{c^2-ab}\right) = 3\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Решение: От условието следва, че $ab + ac + bc = 0$, откъдето

$$a^2 - bc = a^2 + ab + ac = a(a+b+c) .$$

Тогава

$$\frac{a^2-bc}{b+c} = \frac{a(a+b+c)}{b+c} = \frac{a^2(a+b+c)}{ab+ac} = -\frac{a^2(a+b+c)}{bc} = -\frac{a^3(a+b+c)}{abc}$$

Аналогично

$$\frac{b^2-ac}{c+a} = -\frac{b^3(a+b+c)}{abc} \text{ и } \frac{c^2-ab}{a+b} = -\frac{c^3(a+b+c)}{abc} .$$

Тогава

$$\frac{a^2-bc}{b+c} + \frac{b^2-ac}{c+a} + \frac{c^2-ab}{a+b} = -\frac{(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}{abc}$$

По подобен начин

$$\frac{b+c}{a^2-bc}=\frac{b+c}{a(a+b+c)}=\frac{ab+ac}{a^2(a+b+c)}=-\frac{bc}{a^2(a+b+c)}$$

и аналогично

$$\frac{c+a}{b^2-ac}=-\frac{ca}{b^2(a+b+c)},\quad \frac{a+b}{c^2-ab}=-\frac{ab}{c^2(a+b+c)}$$

Следователно

$$\frac{b+c}{a^2-bc}+\frac{c+a}{b^2-ac}+\frac{a+b}{c^2-ab}=-\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{a^2b^2c^2(a+b+c)}.$$

От условието $ab+ac+bc=0$ и от известното тъждество

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

приложено за $x=ab$, $y=bc$ и $z=ca$, следва, че

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3(ab)(ac)(bc)=3a^2b^2c^2.$$

Тогава

$$\frac{b+c}{a^2-bc}+\frac{c+a}{b^2-ac}+\frac{a+b}{c^2-ab}=-\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{a^2b^2c^2(a+b+c)}=-\frac{3}{a+b+c}\cdot$$

Връщайки се към задачата, получаваме

$$\left(\frac{a^2-bc}{b+c}+\frac{b^2-ac}{c+a}+\frac{c^2-ab}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a^2-bc}+\frac{c+a}{b^2-ac}+\frac{a+b}{c^2-ab}\right)=$$

$$=\left(-\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b+c\right)}{abc}\right)\left(-\frac{3}{a+b+c}\right)=3\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Задача 6. Ако $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}=2017$ за стойности на x, y и z, при които знаменателите на трите дроби са различни от нула, да се намери стойността на израза

$$\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(y+x-z)^2}{y+x}.$$

Решение: Нека $A=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(y+x-z)^2}{y+x}$. Тогава

$$A-2017=\frac{(y+z-x)^2}{y+z}+\frac{(z+x-y)^2}{z+x}+\frac{(y+x-z)^2}{y+x}-\frac{x^2}{y+z}-\frac{y^2}{z+x}-\frac{z^2}{y+x}=$$

$$= \frac{(y+z-x)^2 - x^2}{y+z} + \frac{(z+x-y)^2 - y^2}{z+x} + \frac{(y+x-z)^2 - z^2}{y+x} =$$

$$= \frac{(y+z)(y+z-2x)}{y+z} + \frac{(z+x)(z+x-2y)}{z+x} + \frac{(y+x)(y+z-2x)}{y+x} =$$

$= y + z - 2x + z + x - 2y + y + z - 2x = 0$ и следователно $A = 2017$.

Задача 7. Да се реши системата

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2 + y + 1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2 \end{cases}$$

Решение: Тъй като $3x^2 + x + 1 > 0$ за всяко x, $4y^2 + y + 1 > 0$ за всяко y и $5z^2 + z + 1 > 0$ за всяко z, то при $x = 0$ от първото равенство получаваме, че $y = 0$ или $z = 0$. Ако $y = 0$, то третото равенство е изпълнено за всяко z. Ако $z = 0$, то второто равенство е изпълнено за всяко y. Заключаваме, че при $x = 0$ системата има две серии решения $(x, y, z) = (0, 0, p)$ и $(x, y, z) = (0, p, 0)$, където p е произволно реално число. С аналогични разсъждения относно y и z получаваме още една серия решения $(x, y, z) = (p, 0, 0)$. По-нататък ще предполагаме, че $xyz \neq 0$. Ако положим $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, системата приема вида

$$\begin{cases} (b+c)^2 = 3 + a + a^2 \\ (c+a)^2 = 4 + b + b^2 \\ (a+b)^2 = 5 + c + c^2 \end{cases}.$$

Като съберем горните три уравнения и извършим съответни преобразувания, стигаме до

$$(a + b + c)^2 - (a + b + c) - 12 = 0.$$

По-нататък ще използваме, че $p^2 - p - 12 = (p - 4)(p + 3)$. Така получаваме, че $a + b + c = 4$ или $a + b + c = -3$. Сега заместваме в системата. В първия случай от първото уравнение намираме $(4 - a)^2 = 3 + a + a^2$ и $9a = 13$, т.е. $a = \frac{13}{9}$ и следователно $x = \frac{9}{13}$. По подобен начин от второто и третото уравнение намираме съответно $y = \frac{3}{4}$ и $z = \frac{9}{11}$. Във втория случай, когато $a + b + c = -3$, решенията са $(x, y, z) = \left(-\frac{5}{6}, -1, -\frac{5}{4}\right)$.

Задача 8. Да се реши системата:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4y^2 - 5y + 3x + 4 \\ 2y^3 + z^3 = 4z^2 - 5z + 6y + 6 \\ 3z^3 + x^3 = 4x^2 - 5x + 9z + 8 \end{cases}.$$

Решение: Записваме системата във вида:

$$\begin{cases} x^3 - 3x - 2 = -y^3 + 4y^2 - 5y + 2 \\ 2y^3 - 6y - 4 = -z^3 + 4z^2 - 5z + 2 \\ 3z^3 - 9z - 6 = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \end{cases}$$

и след факторизация получаваме:

$$\begin{cases} (x-2)(x+1)^2 = (2-y)(y-1)^2 \\ 2(y-2)(y+1)^2 = (2-z)(z-1)^2 \\ 3(z-2)(z+1)^2 = (2-x)(x-1)^2 \end{cases}.$$

Ще разгледаме няколко случая.

Случай 1. $x = 2$. От първото уравнение следва, че $y = 2$ или $y = 1$.

Случай 1.1. $y = 2$. От второто уравнение следва, че $z = 2$ или $z = 1$. Ако $z = 2$, получаваме $(x, y, z) = (2, 2, 2)$, което е решение. Случаят $z = 1$ е невъзможен, защото тогава дясната страна на третото уравнение е равна на нула, а лявата е различна от нула.

Случай 1.2. $y = 1$. От второто уравнение следва, че дясната му страна е различна от нула (защото лявата е различна от нула) и в частност $z \neq 2$. Но $x = 2$ и от третото уравнение следва, че $z = -1$. Заместваме получените стойности за y и z във второто уравнение: $2.(-1).4 = 3.4$, което очевидно не е изпълнено. Следователно този случай не води до решение.

Случай 2. $y = 2$. От първото уравнение следва, че $x = 2$ или $x = -1$.

Случай 2.1. $x = 2$. От второто уравнение следва, че $z = 2$ или $z = 1$. Ако $z = 2$, получаваме отново, че $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ е решение. Случаят $z = 1$ е невъзможен, защото тогава, както и по-горе, дясната страна на третото уравнение е равна на нула, а лявата е различна от нула.

Случай 2.2. $x = -1$. От второто уравнение следва, че $z = 2$ или $z = 1$. Ако $z = 2$, лявата страна на третото уравнение е равна на нула, а дясната е различна от нула и това е невъзможно. Ако $z = 1$, лявата страна на третото уравнение е равна на -12, докато дясната е равна на 12 и това също е невъзможно.

Случай 3. $z = 2$. От третото уравнение следва, че $x = 2$ или $x = 1$.

Случай 3.1. $x = 2$. От второто уравнение следва, че $y = 2$ или $y = -1$. Ако $y = 2$, стигаме пак до решението $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Случаят $y = -1$ е невъзможен, защото тогава лявата страна на първото уравнение е равна на нула, а дясната е различна от нула.

Случай 3.2. $x = 1$. От второто уравнение следва, че $y = 2$ или $y = -1$. Ако $y = 2$, дясната страна на първото уравнение е равна на нула, а лявата е различна от нула и това е невъзможно. Ако $y = -1$, лявата страна на първото уравнение е равна на -4, а дясната е равна на 12 и това също е невъзможно.

Тъй като случаите $x = 2$, $y = 2$ и $z = 2$ са изчерпани, по-нататък ще считаме, че $x \neq 2$, $y \neq 2$ и $y \neq 2$. Сега да умножим левите и десните страни на трите уравнения. Като съкратим на $(x-2)(y-2)(z-2)$, получаваме уравнението

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2 + 6(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 0.$$

Нека $x=1$. Тогава $y=-1$ или $z=-1$. Ако $y=-1$, попадаме в случай 3.2., който не води до решение. Ако $z=-1$, от първото уравнение на системата намираме $-4=(2-y)(y+1)^2$, откъдето $y-2=\dfrac{4}{(y-1)^2}$ (имаме право да делим на $y-1$, защото от първото уравнение на системата следва, че $y\neq 1$). От второто уравнение на системата имаме $2(y-2)(y+1)^2=12$, откъдето $y-2=\dfrac{6}{(y+1)^2}$. Следователно $\dfrac{4}{(y-1)^2}=\dfrac{6}{(y+1)^2}$ и оттук $2(y+1)^2=3(y-1)^2$, т.е. $y^2-10y+1=0$. Но

$$y^2-10y+1=y^2-10y+25-24=(y-5)^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=\left(y-5+2\sqrt{6}\right)\left(y-5-2\sqrt{6}\right)$$

и заключаваме, че $(x,y,z)=(1,\,5-2\sqrt{6},\,-1)$ и $(x,y,z)=(1,\,5+2\sqrt{6},\,-1)$ са евентуални решения на системата. Но след заместване например във второто уравнение на системата установяваме, че това не са решения.

Нека $y=1$. Тогава $x=-1$ или $z=-1$. Ако $z=-1$, попадаме в случай 1.2., който не води до решение. Ако $x=-1$, от второто уравнение имаме $2.(-1).4=(2-z)(z-1)^2$, т.е. $(2-z)(z-1)^2=-8$ и $z-2=\dfrac{8}{(z-1)^2}$ (имаме право да делим на $z-1$, защото от второто уравнение на системата следва, че $z\neq 1$). От третото уравнение имаме $3(z-2)(z+1)^2=3.4=12$ и $z-2=\dfrac{4}{(z+1)^2}$ (имаме право да делим на $z+1$, защото от третото уравнение на системата следва, че $z\neq -1$). Заключаваме, че $\dfrac{8}{(z-1)^2}=\dfrac{4}{(z+1)^2}$. Оттук $z^2+6z+1=0$ и тъй като

$$z^2+6z+1=z^2+6z+9-8=(z+3)^2-(2\sqrt{2})^2=(z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2}),$$

получаваме 2 стойности $z=-3+2\sqrt{2}$ и $z=-3+2\sqrt{2}$, които заместени последователно например в третото уравнения на системата не водят до решения.

Нека $z=1$. Тогава $x=-1$ или $y=-1$. Ако $x=-1$, попадаме в случай 2.2., който не води до решение. Ако $y=-1$, от първото уравнение имаме $(x-2)(x+1)^2=3.4=12$, т.е. $x-2=\dfrac{12}{(x+1)^2}$ (имаме право да делим на $x+1$, защото от първото уравнение на системата следва, че $x\neq -1$). От третото уравнение имаме $3.(-1).4=(2-x)(x-1)^2$ и $x-2=\dfrac{12}{(x-1)^2}$ (имаме право да делим на $x-1$, защото от третото уравнение на системата следва, че $x\neq 1$). Заключаваме, че $\dfrac{12}{(x+1)^2}=\dfrac{12}{(x-1)^2}$. Оттук $x=0$, но тази стойност не удовлетворява първото уравнение от системата и следователно не е решение.

Окончателно изходната задача има единствено решение $x=y=z=2$.

Задача 9. (Санкт Петербурска олимпиада 2015 г.) За неотрицателните реални числа a, b, c е изпълнено условието

$$2a^3b + 2b^3c + 2c^3a = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 .$$

Да се докаже неравенството

$$2ab(a-b)^2 + 2bc(b-c)^2 + 2ac(c-a)^2 \geq (ab+ac+bc)^2.$$

Решение: Записваме неравенството във вида:

$$2a^3b + 2b^3c + 2c^3a + b^3a + c^3b + a^3c - 3a^2b^2 - 3b^2c^2 - 3c^2a^2 - a^2bc - c^2ab - b^2ac \geq 0$$

.

Като използваме условието на задачата, получаваме:

$$4(a^3b + b^3c + c^3a) + b^3a + c^3b + a^3c - 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - abc(a+b+c) \geq 0$$

и оттук

$$bc(c+a-2b)^2 + ab(b+c-2a)^2 + ac(a+b-2c)^2 \geq 0,$$

което очевидно е изпълнено. Равенство се достига при $a = b = c$.

Коментар. По-интересна е следната задача:

За неотрицателните реални числа a, b, c е изпълнено условието

$$2a^3b + 2b^3c + 2c^3a = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 .$$

Да се докаже неравенството

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(ba^2 + cb^2 + ac^2).$$

Решението оставяме за читателя.

Задача 10. (Олимпиада „Балтийски път" 2016 г.) Намерете всички четворки реални числа (a, b, c, d), които удовлетворяват системата:

$$\begin{cases} a^3 + c^3 = 2 \\ a^2b + c^2d = 0 \\ b^3 + d^3 = 1 \\ ab^2 + cd^2 = -6 \end{cases}$$

<u>**Упътване**</u>: Използвайте полинома $P(x) = (ax+b)^3 + (cx+d)^3$.

Решение: Нека

$$P(x) = (ax+b)^3 + (cx+d)^3 = (a^3+c^3)x^3 + 3(a^2b + c^2d)x^2 + 3(ab^2 + cd^2)x + b^3 + d^3.$$

Тогава, като използваме условието, имаме $P(x) = 2x^3 - 18x + 1$. Тъй като

$$P(0) > 0,\ P(1) < 0 \text{ и } P(3) > 0,$$

уравнението $P(x) = 0$ има 3 различни корена (когато x клони към $-\infty$, $P(x)$ също клони към $-\infty$). От друга страна

$$P(x)=\left[\left(a+c\right)x+b+d\right]\left[((ax+b)^2-(ax+b)\left(cx+d\right)+(cx+d)^2\right].$$

Вторият множител (изразът във втората средна скоба) е винаги положителен освен в случая $ax+b=cx+d=0$. Този случай се реализира при $ad=bc$ и при него първият множител (изразът в първата средна скоба) е също равен на нула. Сега уравнението $P(x)=0$ има два корена. Ако условието вторият множител да е равен на нула не е изпълнено, то уравнението $P(x)=0$ има само един корен. Заключаваме, че изобщо уравнението $P(x)=0$ има най-много два корена. Оттук следва, че разглежданата система няма решения.

За упражнение предлагаме следните задачи:

1. **(Украинска олимпиада 2016 г.)** Нека

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2}=2015.$$

Намерете стойността на израза

$$\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ac+a^2}.$$

2. Нека $x^2+xy+y^2=1$. Намерете стойността на израза

$$x^4+y^4+(x+y)^4.$$

3. **(Сингапурска олимпиада 2010 г.)** Нека $0<a<b<c<d=2a$ и

$$(d-a)\left(\frac{a^2}{b-a}+\frac{b^2}{c-b}+\frac{c^2}{d-c}\right)=(a+b+c)^2.$$

Намерете стойността на израза

$$\frac{bcd}{a^3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.