М + Р Е Ш Е Н И Я

М+565. Да се намерят всички двойки (x, y) от естествени числа x и y, за които

$$\left|x^2+y^2+2x-4y+5\right|+\left|x^2+y^2-2x+4y-5\right|=\left|4x-8y+10\right|.$$

(Тодор Митев, гр. Русе)

Решение. Означаваме $A=x^2+y^2+2x-4y+5$ и $B=x^2+y^2-2x+4y-5$. От условието следва $A=(x+1)^2+(y-2)^2>0$ и $|A|+|B|=|A+B|$. Тъй като $|A|+|B|=|A+B|$ тогава и само тогава, когато $AB\geq 0$, то $B=-(x-1)^2-(y+2)^2+10\geq 0$. Ако $y\geq 2$, то $-(x-1)^2-6\geq B=-(x-1)^2-(y+2)^2+10\geq 0$, което е невъзможно. Следователно $y=1$. След заместване на $y=1$ в даденото равенство получаваме $x_1=1$ и $x_2=2$. Следователно търсените двойки са $(1,1)$ и $(1,2)$.

М+566. В редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член $x_n=n.a^n-2016$ цялото число a не се дели на 2017. Да се докаже, че тази редица съдържа безбройно много членове, които се делят на 2017.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. Разглеждаме членовете на дадената редица с номера $n=2016.m$, където $m\in\mathbb{N}$. За тези членове на редицата имаме $x_n=2016.\left(m.a^{2016.m}-1\right)=2016.\left[m.\left(a^{2016.m}-1\right)+(m-1)\right]$. Числото $a^{2016.m}-1=\left(a^{2016}\right)^m-1$ се дели на $a^{2016}-1$. Тъй като 2017 е просто число, от теоремата на Ферма следва, че $a^{2016}-1$ се дели на 2017. Сега избираме $m-1=2017.k$, т.е. $m=2017.k+1$ за всяко естествено число k. Следователно членовете на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с номера $n=2016.(2017.k+1)$, където $k\in\mathbb{N}$, се делят на 2017. С това задачата е решена.

М+567. Реалните параметри p, q, a и b във функциите $f(x)=x^3+px+q$ и $g(x)=x^2+ax+b$ са свързани с равенството $a+b=p+q$. Ако графиките на $f(x)$ и $g(x)$ се допират в точка T, да се намери стойността на абсцисата x_T на точката T.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. От условието $a+b=p+q$ следва $b-q=p-a$. Разглеждаме уравнението $f(x)=g(x)$. Оттук имаме $x^3+px+q=x^2+ax+b \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x^2+p-a)=0$. Точката с абсциса x_T трябва да е двукратен корен на последното уравнение. Едната възможност е $p-a=0$, тогава уравнението има вида $(x-1)x^2=0$. Тук 0 е двукратен корен, следователно $x_T=0$. Другата възможност е $p-a=-1$, тогава уравнението има вида $(x-1)^2(x+1)=0$. Двукратният корен е 1 и следователно $x_T=1$. Следователно $x_T=0$ или $x_T=1$.

М+568. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ADB=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BDC=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Ако центровете на Ойлеровата и вписаната окръжности на ΔABC са съответно O и I, а r е радиусът на вписаната за ΔABC окръжност, да се докаже, че: а) $DI = 2r$; б) точките O, I и D лежат на една права.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. За ъглите на ΔABC въвеждаме следните означения: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Освен това с R означаваме радиуса на описаната около ΔABC окръжност, а с M, N, P и Q – ортогоналните проекции на I съответно върху AB, BC, CD и DA. Ще докажем, че $MNPQ$ е успоредник. От равенствата в условието се вижда, че $\sphericalangle ADC = 90° + \frac{\beta}{2}$. Тъй като четириъгълниците $AMIQ$ и $CNIP$ са вписани, то $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle AIQ$ и $\sphericalangle CNP = \sphericalangle CID$. От тези равенства следва $\sphericalangle AMD + \sphericalangle CNP = \sphericalangle AIQ + \sphericalangle CIP = \sphericalangle AIC - \sphericalangle PIQ = \left(90° + \frac{\beta}{2}\right) - (180° - \sphericalangle ADC) = \beta$, т.е. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AMD + \sphericalangle CNP$. Нека S е такава точка от $\sphericalangle ABC$, че $\sphericalangle ABS = \sphericalangle AMQ$. Тогава $BS \parallel MQ$. От равенствата $\sphericalangle NBS = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABS = \sphericalangle ABC - \sphericalangle AMQ = \sphericalangle CNP$ следва, че $BS \parallel PN$. Затова $MQ \parallel PN$. От друга страна с помощта на синусовата теорема получаваме последователно

$$MQ = AI.\sin\sphericalangle QAM = AI.\frac{BD}{AB}.\sin\sphericalangle ADB = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\frac{BD}{2R\sin\gamma}.\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{r.BD}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

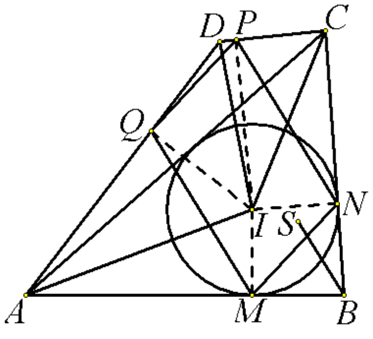
Аналогично се получава, че $PN = \frac{r.BD}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$. Следователно $MQ = PN$. Оттук следва, че $MNPQ$ е успоредник. Това означава, че $PQ = MN$. Тъй като $PQ = DI.\sin\sphericalangle QDP = DI.\cos\frac{\beta}{2}$ и $MN = BI.\sin\beta = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}.\sin\beta = 2r\cos\frac{\beta}{2}$, то $DI.\cos\frac{\beta}{2} = 2r\cos\frac{\beta}{2}$. Следователно $DI = 2r$. С това твърдение а) е доказано.

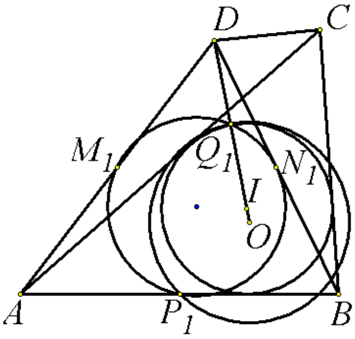
Сега с M_1, N_1, P_1 и Q_1 означаваме средите съответно на отсечките AD, DB, BA и DI. От свойствата на средните отсечки следва, че $M_1N_1 \parallel AI$ и $N_1Q_1 \parallel BI$. Следователно $\sphericalangle M_1Q_1N_1 = \sphericalangle AIB = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Тогава

$$\sphericalangle M_1Q_1N_1 + \sphericalangle M_1P_1N_1 = 90° + \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle M_1DN_1 = 90° + \frac{\gamma}{2} + 90° - \frac{\gamma}{2} = 180°.$$

Оттук следва, че M_1, N_1, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност. Това означава, че точката Q_1 лежи върху Ойлеровата окръжност на ΔABD. Аналогично се доказва, че Q_1 е точка от Ойлеровата окръжност на ΔBCD. Тъй като Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABD, ABC, BCD и CDA се пресичат в една точка, то Q_1 лежи и върху

Ойлеровата окръжност на ΔABC. От друга страна $IQ_1 = \frac{1}{2}.DI = r$ (следва от а)). Затова Q_1 е точка от вписаната в ΔABC окръжност. Според теоремата на Фойербах Ойлеровата окръжност на ΔABC се допира до вписаната му окръжност. Затова Q_1 е допираната точка на двете окръжности. това означава, че точките O, I и Q_1 лежат на една права l. Тъй като Q_1 е среда на DI, то D лежи на l. Следователно O, I и D лежат на една права l. С това задачата е решена.





М+569. Даден е ΔABC. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно върху правите BC, CA и AB, така че са изпълнени равенствата $\overline{BA_1} : \overline{CA_1} = \overline{CB_1} : \overline{AB_1} = \overline{AC_1} : \overline{BC_1} = \lambda \quad (\lambda \neq \pm 1)$. Нека $A_0 = BB_1 \cap CC_1$, $B_0 = CC_1 \cap AA_1$ и $C_0 = AA_1 \cap BB_1$. Ако точките A_0', B_0' и C_0' са изогонално спрегнатите съответно на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC, да се докаже, че точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' лежат на крива от втора степен.

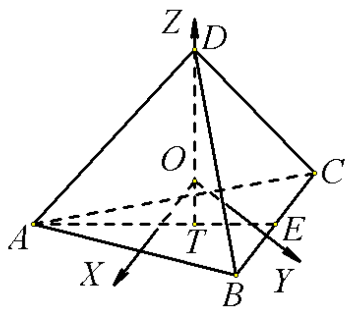
(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Решението на тази задача и някои изследвания върху нея се съдържат в статията „Криви от втора степен и триъгълници, породени от секущи и изогоналност“, публикувана в настоящия брой.

М+570. Ръбът на правилен тетраедър $ABCD$ има дължина a, а точката M лежи върху вписаната в $ABCD$ сфера. Да се намерят целите стойности на a, при които изразът $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека O е центърът на $ABCD$. Въвеждаме правоъгълна координатна система $OXYZ$, за която OZ е насочена по височината OD, OX е успоредна на BC, а OY е такава, че $OXYZ$ е дясно ориентирана. Ако T е ортогоналната проекция на D върху равнината ABC, то $AT = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $TD = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OT = r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. Координатите на върхове на тетраедъра са следните $A\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{3}, -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$ и $D\left(0, 0, \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$.



Ако $M(x,y,z)$ е точка от вписаната в $ABCD$ сфера, то $x^2+y^2+z^2=r^2$. От координатите на точките A, B, C, D и M, след известни преобразувания, намираме

$$AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=4\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{3a^2}{2}=4r^2+\frac{3a^2}{2}=\frac{5a^2}{3}.$$

Следователно $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ приема постоянна стойност за всички точки M от вписаната за $ABCD$ сфера и тази стойност е цяло число, когато $a=3k$ $(k\in\mathbb{N})$.

M+571. Да се намерят последните три цифри на числото 2017^{2017}.

(Танка Милкова, гр. Варна)

Решение на Росен Николаев. Тъй като $2017^{2017}=(2000+17)^{2017}\equiv17^{2017}\pmod{1000}$, за да намерим последните три цифри на числото 2017^{2017}, необходимо е да разберем с какво е сравнимо числото 17^{2017} по модул 1000. От равенствата $(17,1000)=1$, $\varphi(1000)=400$, $2017=5.400+17$ и теоремата на Ойлер получаваме

$$17^{2017}\equiv17^{17}\equiv\left(17^3\right)^5.17^2\equiv4913^5.289\equiv913^5.289\equiv\left(913^2\right)^2.913.289\equiv833569^2.263857\equiv$$
$$\equiv323761.857\equiv761.857\equiv652177\equiv177\pmod{1000}.$$

Следователно последните три цифри на 2017^{2017} са 177.

M+572. Да се покаже, че за всички естествени числа n и k стойността на израза 2017^n+5^k може да се представи като сбор от квадратите на две, три или четири естествени числа.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. Разглеждаме всички възможности, зависещи от четността на числата n и k.

1) Ако $n=2m$ и $k=2p$ (m и p са естествени числа), то $2017^n+5^k=\left(2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2$.

2) Ако $n=2m$ и $k=2p+1$, то $2017^n+5^k=\left(2017^m\right)^2+5.5^{2p}=$
$=\left(2017^m\right)^2+\left(1^2+2^2\right).5^{2p}=\left(2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2+\left(2.5^p\right)^2$.

3) Ако $n=2m+1$ и $k=2p$, то $2017^n+5^k=2017.\left(2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2=$
$=\left(44^2+9^2\right).\left(2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2=\left(44.2017^m\right)^2+\left(9.2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2$.

4) Ако $n=2m+1$ и $k=2p+1$, като вземем предвид случаите 2) и 3), получаваме
$2017^n+5^k=\left(44.2017^m\right)^2+\left(9.2017^m\right)^2+\left(5^p\right)^2+\left(2.5^p\right)^2$.

M+573. Да се определят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението $ax^5-5(a-1)x+a=0$ има точно един реален корен.

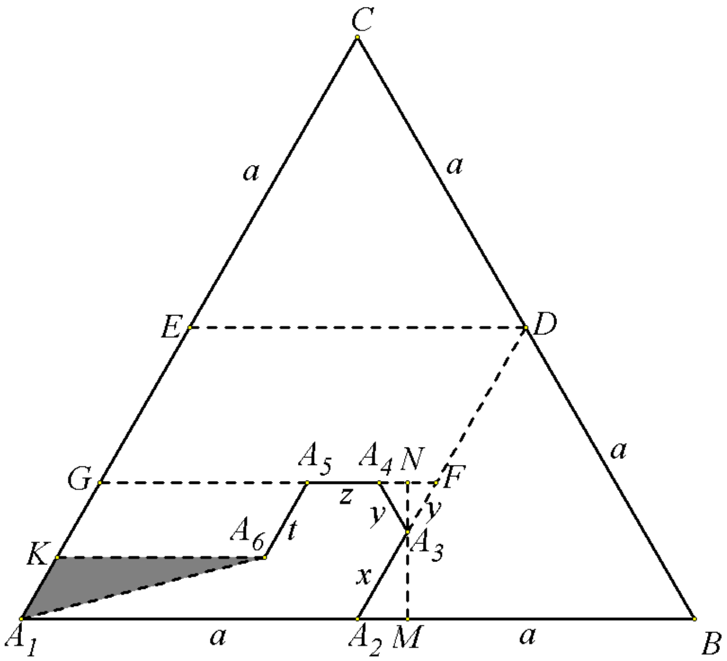
(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. При $a=0$ имаме $5x=0$. Това уравнение има един реален корен $x=0$ и затова $a=0$ е решение на задачата. При $a=1$ имаме $x^5+1=0$. Това уравнение има само един реален корен $x=-1$ и затова $a=1$ е решение на задачата. По-нататък разглеждаме функцията $f(x)=ax^5-5(a-1)x+a$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Производната на тази функция е $f'(x)=5ax^4-5(a-1)$ и равенството $f'(x)=0$ е изпълнено при онези стойности на x, за които $x^4=\frac{a-1}{a}$. В зависимост от стойностите на a са възможни следните случаи: 1) Ако $a\in(0,1)$, то $f'(x)>0$ и $f(x)$ е растяща функция при $x\in(-\infty,+\infty)$, като $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Следователно уравнението $f(x)=0$ има един реален корен. 2) Ако $a<0$, то $f'(x)=0$ при $x_1=-\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}$ и $x_2=\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}$. За да има уравнението $f(x)=0$ само един реален корен, то или $f_{\min}(x_1)=4(a-1)\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}+a>0$, или $f_{\max}(x_2)=a\left[1-4\sqrt[4]{\left(\frac{a-1}{a}\right)^5}\right]<0$. Тъй като при $a<0$ имаме $\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}>1$, то нито едно от тези неравенства не е изпълнено. 3) Ако $a>1$, то $f'(x)=0$ при $x_1=-\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}$ и $x_2=\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}$. За да има уравнението $f(x)=0$ само един реален корен, то или $f_{\max}(x_1)=4(a-1)\sqrt[4]{\frac{a-1}{a}}+a<0$, или $f_{\min}(x_2)=a\left[1-4\sqrt[4]{\left(\frac{a-1}{a}\right)^5}\right]>0$. Първото неравенство очевидно не е изпълнено при $a>1$. Второто неравенство е изпълнено тогава и само тогава, когато $\frac{255a^5-1280a^4+2560a^3-2560a^2+1280a-256}{256a^5}>0$. Изразът в числителя има един реален корен $a=\alpha$. Оттук имаме $f_{\min}(x_2)\geq 0$ при $a\geq\alpha$. Затова уравнението $f(x)=0$ има само един реален корен при $1<a<\alpha$. Като обобщим всички резултати, получаваме, че уравнението $f(x)=0$ има само един реален корен при $a\in[0,\alpha)$, където $\alpha\approx 1{,}49226331093309$.

M+574. Върховете A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 на начупената линия $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ са подредени в равнината в посока, обратна на часовниковата стрелка, така че $\sphericalangle A_1A_2A_3=\sphericalangle A_2A_3A_4=\sphericalangle A_3A_4A_5=\sphericalangle A_4A_5A_6=120^\circ$. Ако $A_1A_2=\frac{47}{2}$, а дължините на отсечките A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_6 в някакъв ред са равни на 4, 5, 6 и $6{,}7$, да се докаже, че $13{,}3<A_1A_6<21{,}2$.

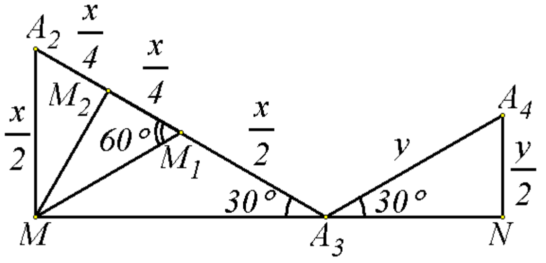
(Тодор Митев, гр. Русе, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. С a, x, y, z и t означаваме дължините съответно на отсечките A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_6. От условието следва, че $A_1A_2 \parallel A_4A_5$, $A_2A_3 \parallel A_5A_6$. Нека B е точка от лъча $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $A_1B=2a$ (Фиг. 1). Ако C е точката, лежаща в една полуравнина с A_3 спрямо правата AB така, че A_1BC е равностранен триъгълник, с D и E означаваме средите съответно на страните BC и A_1C. Освен това с F и G означаваме пресечните точки на правата A_4A_5 съответно с правите A_2D и A_1C (Фиг. 1). Ясно е, че A_3A_4F е равностранен триъгълник и $GF = a$ (Фиг. 1).

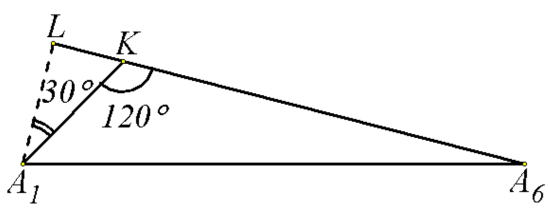


Фиг. 1

Ще докажем, че точките A_3, A_4, A_5 и A_6 са вътрешни за ΔA_1BC (Фиг. 1). Тъй като $A_2A_3 \le 6{,}7$ и $A_2A_3 < A_2D = a = \dfrac{47}{2}$, то A_3 е вътрешна точка за ΔA_1BC. От това, че $A_3A_4 \parallel BC$ и $A_3A_4 \le 6{,}7 < 2.a = 47$, следва, че A_4 е вътрешна точка за ΔA_1BC. Най-големите стойности, които могат да приемат числата y и z, са $6{,}7$ и 6. Затова $FA_5 = y + z \le 6{,}7 + 6 = 12{,}7 < \dfrac{47}{2} = a$. От това неравенство и $FA_5 \parallel A_1A_2$ следва, че точката A_5 се съдържа в ромба A_1A_2DE (Фиг. 1). Следователно A_5 е вътрешна за ΔA_1BC. Ако A_6 е вътрешна точка за ΔA_1BC, то A_5A_6 не пресича A_1A_2. Затова е достатъчно да докажем, че дължината на отсечката A_5A_6 е по-малка от разстоянието NM (Фиг. 1) между правите FG и A_1A_2. Това ще бъде изпълнено, ако $MN > 6{,}7$. Ако M_1 е средата на A_2A_3, а M_2 – петата на перпендикуляра, спуснат от M към A_2A_3, то от свойствата на правоъгълния триъгълник с ъгъл $30°$ следва, че $A_3M_2 = \dfrac{3}{4}x$ (Фиг. 2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Тъй като хипотенузата в правоъгълен триъгълник е най-голямата му страна, то от ΔA_3MA_2 следва, че $MA_3 > \frac{3}{4}x$ (Фиг. 2). Аналогично имаме $NA_3 > \frac{3}{4}y$. Най-малките стойности, които приемат x и y, са 4 и 5. Следователно $MN = MA_3 + NA_3 > \frac{3}{4}(x+y) \geq \frac{3}{4}(4+5) = \frac{27}{4} = 6{,}75 > 6{,}7$ (Фиг. 2). С това е доказано, че и точката A_6 е вътрешна за ΔA_1BC.

Сега построяваме точка K върху A_1C така, че $A_6K \parallel A_1B$ (Фиг. 1). Следователно $KG = A_5A_6 = t$. От доказаното по-горе следва, че K лежи между A_1 и G (Фиг. 1). За дължините на KA_1 и KA_6 са изпълнени равенствата

$$KA_1 = A_1E - KG - GE = a - t - (A_2D - A_2F) = a - t - \left[a - (x+y)\right] = x + y - t,$$
$$KA_6 = GA_4 = FG - A_4F - A_4A_5 = a - y - z.$$

Оттук имаме $A_1A_6 < KA_6 + KA_1 = a + x - z - t \leq \frac{47}{2} + 6{,}7 - (4+5) = 21{,}2$.

Нека сега L е ортогоналната проекция на A_1 върху правата A_6K (Фиг. 3). Тъй като в правоъгълния триъгълник A_6KL е изпълнено равенството $\sphericalangle KA_1L = 30^\circ$, то $KL = \frac{1}{2}KA_1$ (Фиг. 3). Оттук имаме $A_1A_6 > A_6L = KA_6 + KL = KA_6 + \frac{1}{2}KA_1$ (Фиг. 3). Следователно

$$A_1A_6 > a - y - z + \frac{x+y-t}{2} = \frac{2a - (x+y+z+t) + 2x - z}{2} = \frac{47 - 21{,}7 + 2x - z}{2} = \frac{25{,}3 + 2x - z}{2}.$$

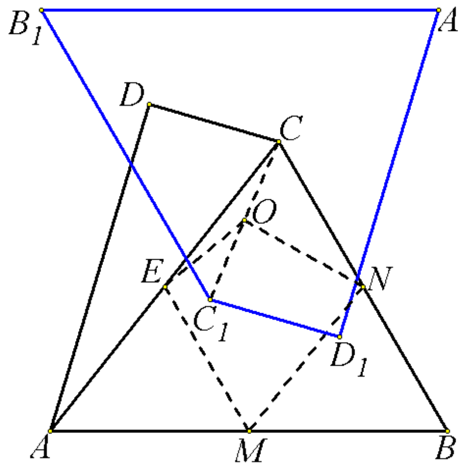
Тъй като $x \geq 4$ и $z \leq 6{,}7$, то $A_1A_6 > \frac{25{,}3 + 2.4 - 6{,}7}{2} = 13{,}3$.

М+575. Точката C_1 от равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е такава, че $\sphericalangle AC_1B = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AC_1D = 180^\circ - \sphericalangle ACD$. Аналогично са определени точките A_1, B_1 и D_1. Да се докаже, че съществува точка, относно която четириъгълниците са симетрични.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. Означаваме средите на отсечките AB, BC и CA съответно с M, N и E. Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB се пресичат в една точка O (точка на Хапач). Нека C' е точката, симетрична на C спрямо O. Тъй като O е точка от Ойлеровата окръжност на ΔABC, то $\sphericalangle EON = 180^\circ - \sphericalangle EMN = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle AC_1B) = \sphericalangle AC_1B$. Освен това OE и ON са средни отсечки в триъгълниците $AC'C$ и $BC'C$. Затова $OE \parallel AC'$ и $ON \parallel BC'$. Това означава, че $\sphericalangle EON = \sphericalangle AC'B$. Следователно $\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle AC'B$, т.е. точките C' и C_1 лежат на една и съща дъга от окръжност, минаваща през точките A и B. По същия начин се показва, че C' и C_1 лежат на една и съща дъга от окръжност, минаваща през точките A и D. Така получаваме $C' \equiv C_1$, т.е. C_1 е симетрична на C спрямо O. Аналогично се показва, че точките A_1, B_1 и D_1 са симетрични съответно на A, B и D

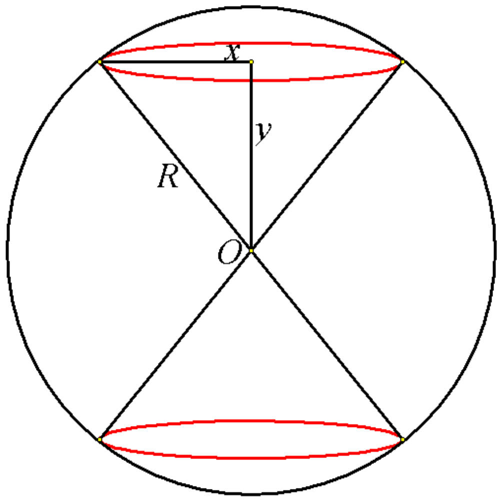
спрямо O. Следователно четириъгълниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са симетрични относно точката O.



M+576. В кълбо с обем V е вписана конична повърхнина с връх, който съвпада с центъра на кълбото. Коничната повърхнина пресича повърхнината на кълбото в две еднакви окръжности, които лежат в две успоредни равнини и отсичат от коничната повърхнина тяло с обем V_K. Да се намери най-малката стойност на отношението $V:V_K$.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека даденото кълбо има радиус R. Тогава $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Коничната повърхнина се състои от два еднакви конуса с радиуси на основите x и дължини на височините y. Тъй като $x^2+y^2=R^2$, то $V_K=2.\frac{\pi}{3}x^2y=\frac{2\pi}{3}x^2\sqrt{R^2-x^2}$ и $0<x\le R$.



Разглеждаме функцията $f(x)=x^2\sqrt{R^2-x^2}$ при $0<x\le R$. Производната на тази функция е следната $f'(x)=\frac{x(2R^2-3x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Единственият корен на уравнението $f'(x)=0$, който удовлетворява условията $0<x\le R$, е $x_0=R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Оттук имаме $y_0=\frac{R}{\sqrt{3}}$. При $x=x_0$ функцията $f(x)$ има най-голяма стойност в интервала $(0,R)$. Затова търсената най-малка стойност е $\frac{V}{V_K}=\frac{V}{3\sqrt{3}}$.