ИЗСЛЕДВАНЕ РЕАЛНИТЕ КОРЕНИ НА ЕДНО УРАВНЕНИЕ ОТ ПЕТА СТЕПЕН С ПАРАМЕТЪР

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

В брой 2 от 2017 г. на списание Математика плюс е формулирана задача **М+573**, чиито автори са Росен Николаев и Йордан Петков. Тази задача е формулирана по следния начин:

Да се определят стойностите на реалния параметър a, *при които уравнението* $ax^5-5(a-1)x+a=0$ *има точно един реален корен.*

Едно решение на тази задача се съдържа в рубриката „М+ решения“ на брой 1, 2018 г. Тук ще определим най-общо броя на корените на полинома $f(x)=ax^5-5(a-1)x+a$ в зависимост от изменението на параметъра a. Това ще извършим, като използваме метода на Щурм за определяне броя на корените на полином в даден интервал. За целта разглеждаме следната редица на Щурм:

$$f(x)=ax^5-5(a-1)x+a,\ f'(x)=5\left(ax^4-a+1\right),\ R_1=4(a-1)x-a,$$
$$R_2=\frac{5\left(255a^5-1280a^4+2560a^3-2560a^2+1280a-256\right)}{256(a-1)^4}.$$

Преди да преминем към изследване на реалните корени на полинома $f(x)$ ще разгледаме същата задача относно полинома

$$g(a)=255a^5-1280a^4+2560a^3-2560a^2+1280a-256.$$

Редицата на Щурм за полинома $g(a)$ е следната:

$$g(a)=255a^5-1280a^4+2560a^3-2560a^2+1280a-256,$$
$$g'(a)=5(3a-4)(5a-4)\left(17a^2-32a+16\right),$$
$$r_1=\frac{256(2a-1)\left(2a^2-2a+1\right)}{255},\ r_2=-\frac{75\left(170a^2-170a+51\right)}{8},\ r_3=\frac{-512(2a-1)}{1265},\ r_4=\frac{1275}{16}.$$

От резултатите в таблица 1 се вижда, че полиномът $g(a)$ притежава един реален корен $\alpha\in(1,2)$. Освен това лесно се забелязва, че $g(a)<0$ при $a\in(-\infty,\alpha)$ и $g(a)>0$ при $a\in(\alpha,+\infty)$.

	$g(a)$	$g'(a)$	$r_1(a)$	$r_2(a)$	$r_3(a)$	$r_4(a)$	Var
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	3
1	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
$Var(-\infty)-Var(1)=0$							
a	$g(a)$	$g'(a)$	$r_1(a)$	$r_2(a)$	$r_3(a)$	$r_4(a)$	Var
1	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
2	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$Var(1)-Var(2)=1$							
a	$g(a)$	$g'(a)$	$r_1(a)$	$r_2(a)$	$r_3(a)$	$r_4(a)$	Var
2	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$Var(2)-Var(+\infty)=0$							

Таблица 1

Като използваме последните наблюдения, получаваме необходимите ни резултати за редицата на Щурм, определена от полинома $f(x)$. Тези резултати са нанесени в таблица 2.

$a<0$					
x	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	Var
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	3
$+\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=3$					
$0<a<1$					
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=1$					
$1<a<\alpha$					
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=1$					
$a>\alpha$					
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=3$					

Таблица 2

Резултатите, отбелязани в таблица 2, водят до следните изводи:

1) Ако $a\in(0,1)\cup(1,\alpha)$ полиномът $f(x)$ има един реален корен;

2) Ако $a\in(-\infty,0)\cup(\alpha,+\infty)$ полиномът $f(x)$ има три реални корена.

$a=\alpha$					
x	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$	Var
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	0	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=2$					
0	$+$	$-$	$-$	0	1
1	$+$	$+$	$+$	0	0
$Var(0)-Var(1)=1$					

Таблица 3

Остава да разберем какво се случва с корените на $f(x)$ при $a=\alpha$. От горната част на таблица 3 се вижда, че $f(x)$ има два реални корена при $a=\alpha$. Това означава, че $f(x)$ има един прост и един двоен корен. От долната част на таблица 3 се забелязва, че $f(x)$ има един корен в интервала $(0,1)$. По друг начин казано, $f(x)$ има положителен корен. От друга страна произведението на всички корени на $f(x)$, според формулите на Виет, е равно на $-\frac{a}{a}=-1<0$. Затова, ако x_1, x_2 и $x_3=x_2$ са реалните корени при $a=\alpha$, простият корен x_1 е отрицателен, а двойният $x_2=x_3$ е положителен. Следователно в този случай $f(x)$ има двоен корен в интервала $(0,1)$.

Накрая, като забележим, че при $a=0$ и $a=1$ полиномът $f(x)$ има по един реален корен, обобщаваме извършените изследвания по следния начин:

1) Ако $a\in[0,\alpha)$, полиномът $f(x)$ има един реален корен;

2) Ако $a\in(-\infty,0)\cup(\alpha,+\infty)$, полиномът $f(x)$ има три реални различни корена;

3) Ако $a=\alpha$, полиномът $f(x)$ има един прост отрицателен корен x_1 и един двоен положителен корен $x_2=x_3$.

С известна точност стойностите на α, x_1 и $x_2=x_3$ могат да се определят по следния начин: $\alpha\approx 1{,}49226331093309$, $x_1\approx$ -1,250943005 и $x_2=x_3\approx 0{,}75785$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., В. Ненков. Преброяване на реалните нули на полиноми по метода на Щурм, Математика плюс, 1, 2018, 65 – 77.