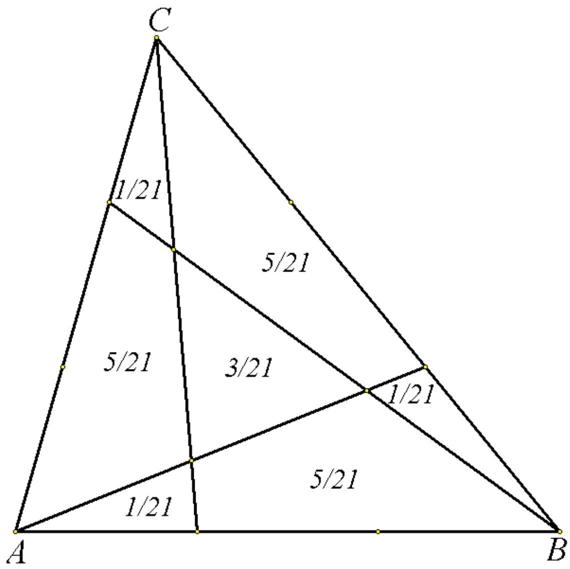
М +СЕМИНАР

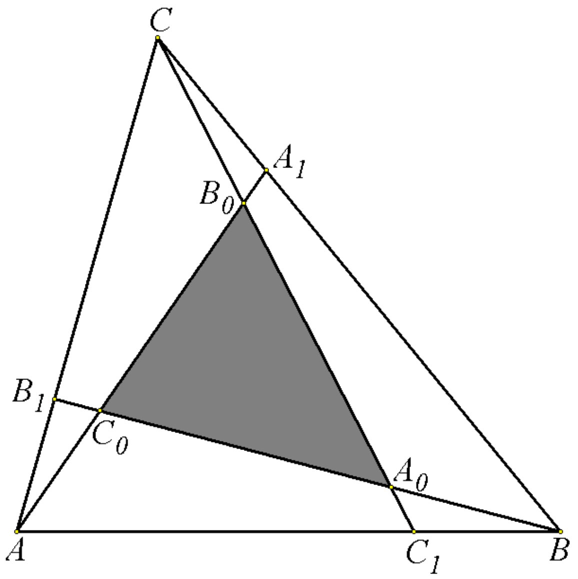
КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН И ТРИЪГЪЛНИЦИ, ПОРОДЕНИ ОТ СЕКУЩИ И ИЗОГОНАЛНОСТ

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

1. Лица, определени от секущи, делящи страните на триъгълник в постоянно отношение. Една доста отдавна известна задача има следното съдържание: *Ако страните на триъгълник се разделят с точки по на три равни части и първите (вторите) точки, взети по посока на часовниковата стрелка (или противоположната), се свържат с отсечки със срещуположните им върхове, триъгълникът се разделя на седем части, лицето на всяка от които е кратно на* $\frac{1}{21}$ *от лицето на триъгълника* (Фиг. 1) [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

В тази задача лицето на централния триъгълник се оказва, че е равно на $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ от лицето на дадения триъгълник. Аналогично се разглежда случаят, при който страната на триъгълника се разделя на $n \geq 3$ равни части. В този случай Хауърд

Гросман е получил, че лицето на централния триъгълник е равно на $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ от лицето на дадения [1].

Тук ще решим следната обща задача: *Даден е* ΔABC, *а точките* A_1, B_1 *и* C_1 *лежат съответно върху правите* BC, CA *и* AB, *така че са изпълнени равенствата* $\overline{BA_1}:\overline{CA_1}=\overline{CB_1}:\overline{AB_1}=\overline{AC_1}:\overline{BC_1}=\lambda$ $(\lambda\neq\pm1)$. *Ако* $A_0=BB_1\cap CC_1$, $B_0=CC_1\cap AA_1$ *и* $C_0=AA_1\cap BB_1$, *да се определи лицето на* $\Delta A_0B_0C_0$ (Фиг. 2).

За да решим тази задача, ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ [2].

От дефиницията на точките A_1, B_1 и C_1 следва, че техните координати се изразяват по следния начин:

$$A_1\left(0,\frac{1}{1-\lambda},-\frac{\lambda}{1-\lambda}\right),\ B_1\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda},0,\frac{1}{1-\lambda}\right),\ C_1\left(\frac{1}{1-\lambda},-\frac{\lambda}{1-\lambda},0\right). \tag{1}$$

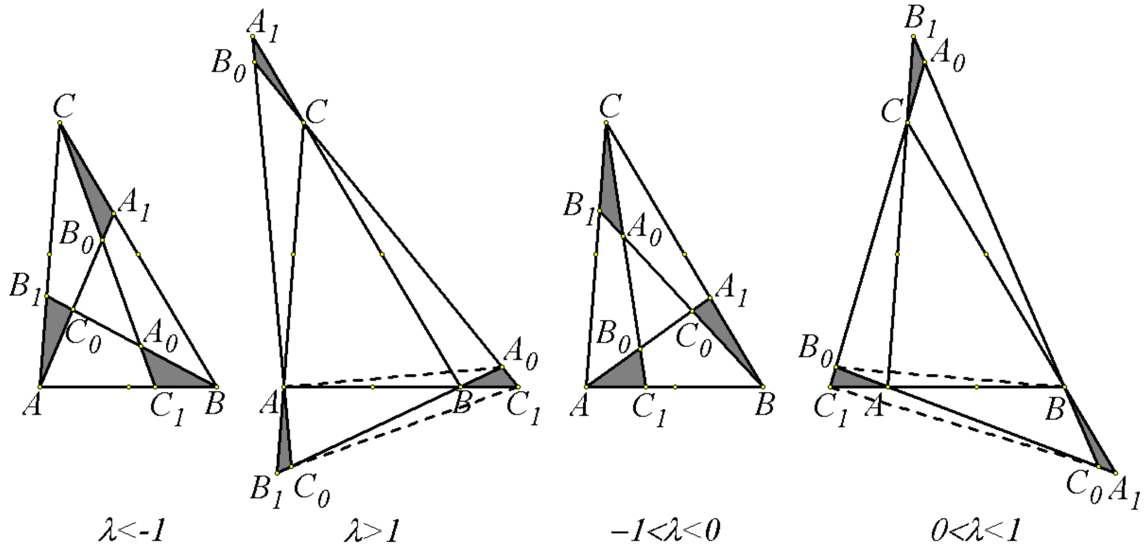
Като използваме координатите (1), представяме правите AA_1, BB_1 и CC_1 съответно чрез следващите параметрични уравнения:

$$AA_1:\begin{cases}x=1+(1-\lambda)t_a,\\ y=-t_a,\\ z=\lambda t_a,\end{cases}\quad BB_1:\begin{cases}x=\lambda t_b,\\ y=1+(1-\lambda)t_b,,\\ z=-t_b,\end{cases}\ CC_1:\begin{cases}x=-t_c,\\ y=\lambda t_c,\\ z=1+(1-\lambda)t_c.\end{cases}$$

След решаване на системите, образувани от уравненията на двойките прави, се получават координатите на точките A_0, B_0 и C_0 във вида:

$$\begin{aligned}&A_0\left(-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1}\right),\\ &B_0\left(\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1}\right),\\ &C_0\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda+1},\frac{1}{\lambda^2-\lambda+1},-\frac{\lambda}{\lambda^2-\lambda+1}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

(Координатите (2) са валидни и в случая, когато $\lambda=-1$, т.е когато A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на BC, CA и AB. В този случай, както трябва да се очаква, точките A_0, B_0 и C_0 съвпадат с медицентъра на ΔABC.)



Фиг. 3

Ориентираното лице на триъгълник с върхове $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$, $N\left(x_N, y_N, z_N\right)$ и $P\left(x_P, y_P, z_P\right)$ се определя по формулата

$$\tilde{S}_{MNP} = \begin{vmatrix} x_M & y_M & z_M \\ x_N & y_N & z_N \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} .S, \tag{3}$$

където S е лицето на ΔABC [2].

От (2) и (3) следва, че $\tilde{S}_{A_0B_0C_0} = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2-\lambda+1}.S$. Тъй като коефициентът пред S винаги е положително число, то $\Delta A_0B_0C_0$ винаги е еднакво ориентиран с ΔABC. Затова в тази формула $\tilde{S}_{A_0B_0C_0} = S_{A_0B_0C_0}$. Като вземем предвид и това, че $\lambda \neq -1$, горната формула може да се запише така:

$$S_{A_0B_0C_0} = \frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^3+1}.S. \tag{4}$$

Формулата на Гросман се получава от (4) при $\lambda = -\dfrac{1}{n-1}$ и $\lambda = -(n-1)$.

В зависимост от стойностите на λ ъгловите триъгълници са два вида (Фиг. 3). Като вземем предвид ориентацията на тези триъгълници в съответните случаи, от (1), (2) и (3) за лицата им намираме следните равенства:

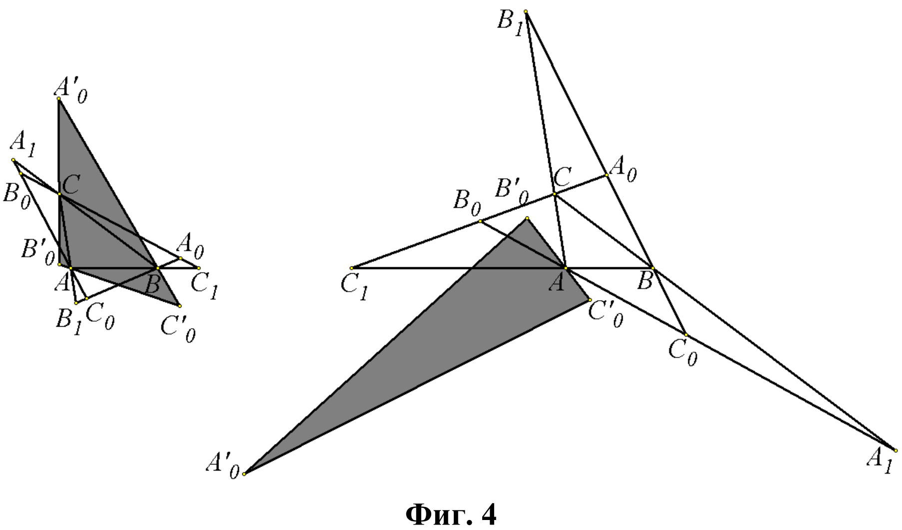
$$\begin{aligned} &S_{AB_1C_0} = S_{BC_1A_0} = S_{CA_1B_0} = \frac{S}{|\lambda-1|\left(\lambda^2-\lambda+1\right)}, \quad \lambda \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty), \\ &S_{AB_0C_1} = S_{BC_0A_1} = S_{CA_0B_1} = \frac{|\lambda|^3 S}{|\lambda-1|\left(\lambda^2-\lambda+1\right)}, \quad \lambda \in (-1,0) \cup (0,1). \end{aligned} \tag{5}$$

По отношение на четириъгълниците, в зависимост от различните възможности за λ, има четири случая (Фиг. 3). Например четириъгълникът $AC_1A_0C_0$ (първият случай на фиг. 3) се получава при $\lambda < -1$. Лицето му намираме последния начин: от (1), (2) и (3) следва, че ориентираните лица на триъгълниците AC_1A_0 и AA_0C_0 са съответно $\tilde{S}_{AC_1C_0} = -\dfrac{\lambda S}{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)}$ и $\tilde{S}_{AA_0C_0} = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2-\lambda+1}S$. Тъй като триъгълниците AC_1A_0 и AA_0C_0 са еднакво ориентирани, то $S_{AC_1A_0C_0} = \tilde{S}_{AC_1C_0} + \tilde{S}_{AA_0C_0}$ и $S_{AC_1A_0C_0} = \dfrac{\lambda^2-\lambda-1}{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)}S$. Другите случаи се разглеждат аналогично. Така получаваме равенствата

$$
\begin{aligned}
&S_{AC_1A_0C_0} = S_{BA_1B_0A_0} = S_{CB_1C_0A_0} = \frac{\lambda^2-\lambda-1}{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)}S, \quad (\lambda < -1),\\
&S_{AA_0C_1C_0} = S_{BB_0A_1A_0} = S_{CC_0B_1B_0} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)}S, \quad (\lambda > 1),\\
&S_{AB_0A_0B_1} = S_{BC_0B_0C_1} = S_{CA_0C_0A_1} = \frac{\lambda(\lambda^2+\lambda-1)}{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)}S, \quad (-1 < \lambda < 0),\\
&S_{AA_0B_1B_0} = S_{BB_0C_1C_0} = S_{CC_0A_1A_0} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)}S, \quad (0 < \lambda < 1).
\end{aligned} \tag{6}
$$

При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ и $\lambda = -2$, от (4) и съответните случаи на (5) и (6), получаваме резултата, потвърждаващ твърдението на първоначалната задача, който е илюстриран на фиг. 1.

2. Триъгълник, определен от точките, изогонално спрегнатина A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC. Ако разгледаме точките A_0', B_0' и C_0', които са изогонално спрегнатите съответно на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC, възниква въпросът за съществуването на $\Delta A_0'B_0'C_0'$ и определяне на неговото лицето (когато $\Delta A_0'B_0'C_0'$ съществува) (Фиг. 4).



Фиг. 4

Първо да отбележим, че ако $P(x_P, y_P, z_P)$ е точка в равнината на ΔABC, нейната изогонално спрегнатата има следното координатно представяне:

(7) $P'\left(\dfrac{a^2y_Pz_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P},\dfrac{b^2z_Px_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P},\dfrac{c^2x_Py_P}{a^2y_Pz_P+b^2z_Px_P+c^2x_Py_P}\right)$ [2].

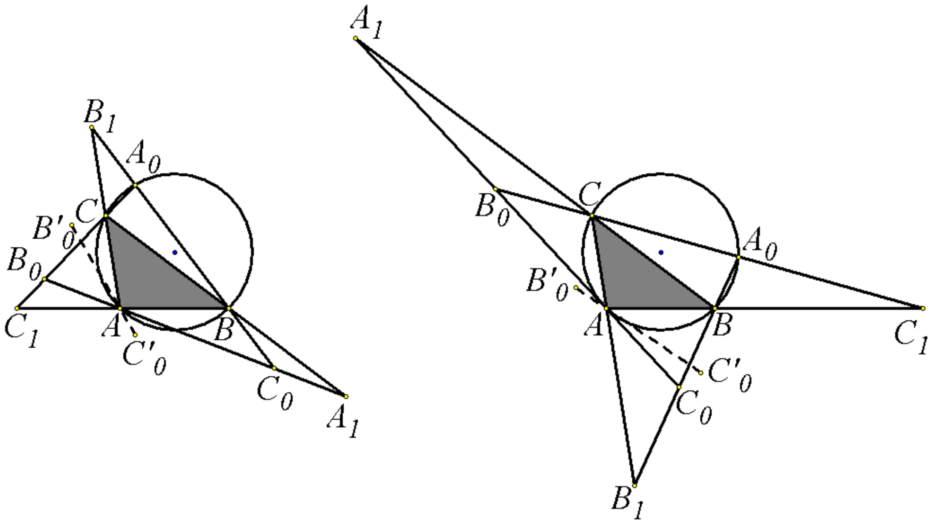
От (2) и (7) за координатите на точките A_0', B_0' и C_0' намираме

(8)
$$\begin{aligned}
&A_0'\left(\frac{-\lambda a^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2},\frac{b^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2},\frac{\lambda^2c^2}{-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2}\right),\\
&B_0'\left(\frac{\lambda^2a^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2},\frac{-\lambda b^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2},\frac{c^2}{\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2}\right),\\
&C_0'\left(\frac{a^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2},\frac{\lambda^2b^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2},\frac{-\lambda c^2}{a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2}\right).
\end{aligned}$$

Триъгълникът $A_0'B_0'C_0'$ няма да съществува само когато е изпълнено някое от равенствата $-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2=0$, $\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2=0$ и $a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2=0$. Първото равенство е в сила тогава и само тогава, когато λ приема една от двете стойности

(9) $$\lambda_1=\frac{a^2-\sqrt{b^4-4c^2a^2}}{2c^2},\ \lambda_2=\frac{a^2+\sqrt{b^4-4c^2a^2}}{2c^2}\ \left(b^2-2ca\ge 0\right).$$

При стойностите на λ, определени с (9), точката A_0' няма да съществува. Това е така, защото в тези случаи точката A_0 лежи върху описаната за ΔABC окръжност (Фиг. 5).



Фиг. 5

Ако допуснем, че са изпълнени едновременно равенствата $-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2=0$ и $\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2=0$, след елиминиране на λ^2 получаваме $\lambda=-\dfrac{c^4-a^2b^2}{a^4-b^2c^2}$. След заместване на тази стойност за λ в първото равенство намираме

$$\frac{c^4\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2\right)}{\left(a^4-b^2c^2\right)^2}=0.$$

Последното равенство е изпълнено точно когато $a=b=c$. Но тогава ще получим равенството $c^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)=0$, което е невъзможно. Следователно е възможно само една от точките A_0', B_0' и C_0' да не съществува. Затова $\Delta A_0'B_0'C_0'$ не съществува и се превръща в отсечка, когато точно една от точките A_0, B_0 и C_0 лежи върху описаната около ΔABC окръжност.

Формулата за ориентираното лице на $\Delta A_0'B_0'C_0'$ се получава от (3) и (8) във вида

(10)
$$\tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'}=\frac{\left(\lambda^3+1\right)^2 a^2b^2c^2}{\left(-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2\right)\left(\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2\right)\left(a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2\right)}S\,.$$

От (10) се вижда, че триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и ABC са противоположно ориентирани (вторият случай на фиг. 4), когато имаме едно или три от неравенствата $-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2<0$, $\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2<0$ и $a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2<0$. Ако допуснем, че съществува стойност на λ, при която са изпълнени едновременно първите две неравенства, след почленното им събиране се получава $\left(c^2+a^2\right)\lambda^2-\left(a^2+b^2\right)\lambda+\left(b^2+c^2\right)<0$. За дискриминантата на квадратния относно λ тричлен имаме неравенството $-16S^2-\left(5a^4+2b^2c^2+2c^2a^2\right)<0$. Но това означава, че квадратният тричлен приема положителни стойности за всички λ, което противоречи на полученото неравенство. Следователно триъгълниците $A_0'B_0'C_0'$ и ABC са противоположно ориентирани, когато е изпълнено точно едно от горните три неравенства.

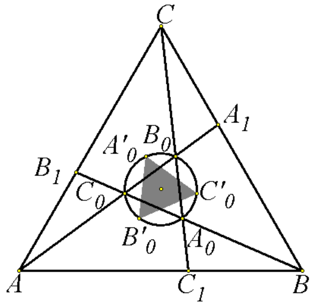
3. Равнолицевост на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. От (4) и (10) се вижда, че когато $a=b=c$, лицата на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са еднакви за всички стойности на λ. Така възниква задачата за определяне на стойностите на λ, при които тези триъгълници са равнолицеви. Възможни са два основни случая.

3.1. Триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са еднакво ориентирани. От (4) и (10) следва, че стойностите на λ, при които $\tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'}=S_{A_0B_0C_0}$, са корени на полинома

(11)
$$\varphi(\lambda)=M\lambda^4-2N\lambda^3+K\lambda^2-2M\lambda+N\,,$$

където

(12)
$$M=a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2-3a^2b^2c^2,\,N=a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4-3a^2b^2c^2,$$
$$K=a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2.$$



Фиг. 6

Оказва се, че за всички реални стойности на a, b, c и λ е изпълнено неравенството $\varphi(\lambda) \geq 0$, като равенство се достига само при $a = b = c$. Следователно еднакво ориентираните триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са равнолицеви само когато ΔABC е равностранен. Нещо повече, в този случай $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са еднакви равностранни триъгълници с обща описана окръжност (Фиг. 6).

3.2. Триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са противоположни ориентирани. От (4) и (10) следва, че стойностите на λ, при които $\tilde{S}_{A_0'B_0'C_0'} = -S_{A_0B_0C_0}$, са корени на полинома

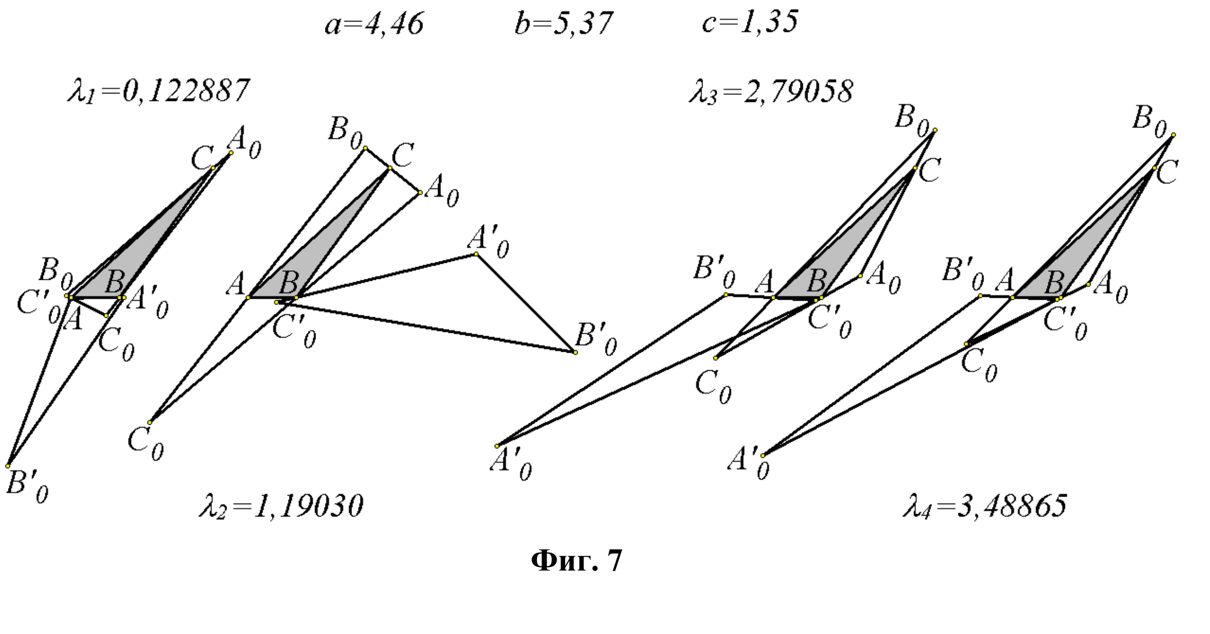
(13) $$\psi(\lambda) = T\lambda^6 - U\lambda^5 + 2V\lambda^4 - W\lambda^3 + 2U\lambda^2 - V\lambda + T,$$

Където

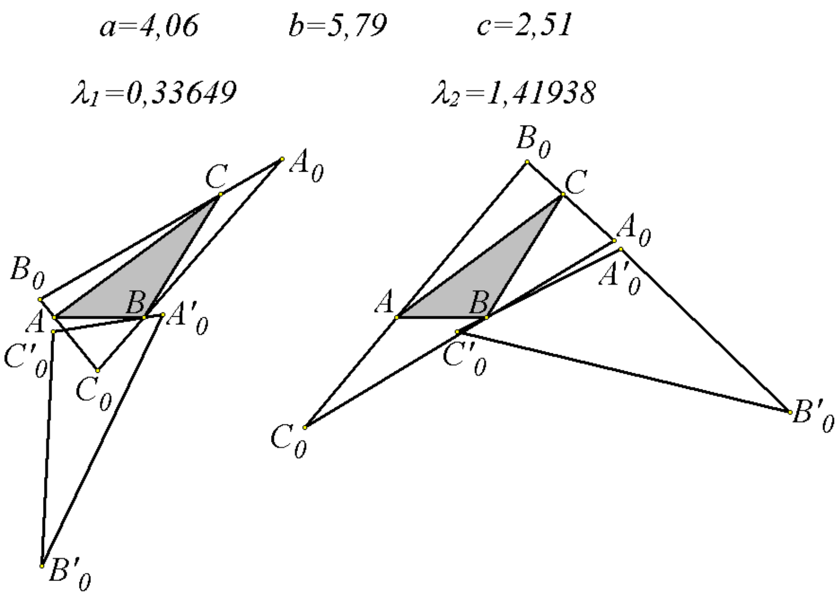
(14) $$T = 2a^2b^2c^2, U = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3a^2b^2c^2,$$
$$V = a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 + 3a^2b^2c^2, W = a^6 + b^6 + c^6 + 11a^2b^2c^2.$$

Оказва се, че, в зависимост от a, b и c полиномът $\psi(\lambda)$ има най-много четири реални корена. Това означава, че имаме следните възможности:

1) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по четири двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (Фиг. 7).



Фиг. 7



Фиг. 8

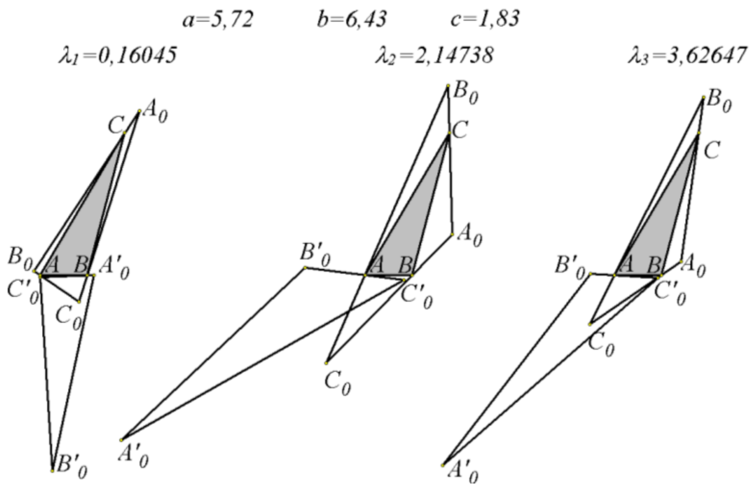
2) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по две двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (Фиг. 8).

3) Съществуват триъгълници ABC, които не притежават нито една двойка равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. Такъв е триъгълникът ABC със страни $a = 3,31$, $b = 2,02$ и $c = 0,97$.

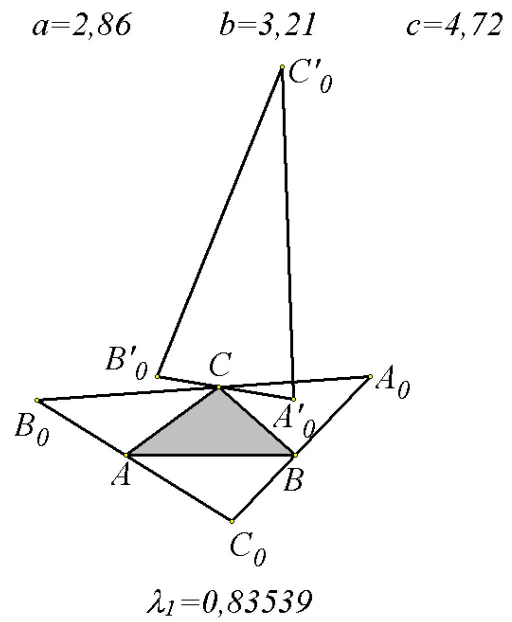
Освен споменатите случаи е възможно $\psi(\lambda)$ да има корен при $\lambda = 1$. Нека представим $\psi(\lambda)$ във вида $\psi(\lambda) = \psi_1(\lambda)(\lambda - 1) + U + V - W + 2T$, където

$$\psi_1(\lambda) = T\lambda^5 - (U - T)\lambda^4 + (2V - U + T)\lambda^3 -$$
$$-(U - 2V + W - T)\lambda^2 + (U + 2V - W + T)\lambda + V + U - W + T.$$

Ако $U + V - W + 2T = 0$, то $\lambda = 1$ е корен на $\psi(\lambda)$, който няма геометричен смисъл. Тогава, според казаното за $\psi(\lambda)$, полиномът от пета степен $\psi_1(\lambda)$ има най-много три реални корена. Следователно имаме следните възможности:



Фиг. 9



Фиг. 10

4) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по три двойки равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (Фиг. 9).

5) Съществуват триъгълници ABC, които притежават по една двойка равнолицеви триъгълници $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ (Фиг. 10).

4. Описани окръжности на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. При изследването за равнолицевост на триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ бе отбелязано, че, когато ΔABC е равностранен, те имат обща описана окръжност. Така възниква въпросът за намиране на други случаи, в които триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ имат това свойство.

Първо ще определим координатите на центровете O_0 и $\bar{O}_0$ съответно на описаните окръжности k_0 и $\bar{k}_0$ за триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$. Условието за перпендикулярност на векторите $\overrightarrow{u_1}(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)$ и $\overrightarrow{u_2}(\lambda_2,\mu_2,\nu_2)$ $(\lambda_1+\mu_1+\nu_1=0,$ $\lambda_2+\mu_2+\nu_2=0)$ е следното:

$$(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)a^2+(\nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1)b^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)c^2=0. \tag{15}$$

От (15) и (2) намираме общите уравнения на симетралите съответно на отсечките A_0B_0 и A_0C_0 във вида:

$$\left[(b^2-c^2)\lambda^3+(a^2-2b^2)\lambda^2+b^2\lambda-b^2\right]x+\left[a^2\lambda^3-a^2\lambda^2+(2a^2-b^2)\lambda+c^2-a^2\right]y+$$
$$+(1-\lambda)\left[a^2\lambda^2-(a^2+b^2-c^2)\lambda+b^2\right]z=0,$$

$$\left[c^2\lambda^3-c^2\lambda^2+\left(2c^2-a^2\right)\lambda+b^2-c^2\right]x+(1-\lambda)\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]y+$$
$$+\left[\left(a^2-b^2\right)\lambda^3+\left(c^2-2a^2\right)\lambda^2+a^2\lambda-a^2\right]z=0.$$

Решението на системата, определена от тези уравнения и равенството $x+y+z=1$, представя координатите на центъра O_0 чрез равенствата:

(16)
$$\begin{aligned}
x_{O_0}=&\left[a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda^4+\left(a^4+c^4+a^2b^2-b^2c^2-4c^2a^2\right)\lambda^3+\right.\\
&+\left(a^4-2b^4-2c^4+a^2b^2+4b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^2+\\
&\left.+\left(a^4+b^4-4a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda+a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)\right]/16S^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^2,\\
y_{O_0}=&\left[b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda^4+\left(a^4+b^4-4a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^3+\right.\\
&+\left(-2a^4+b^4-2c^4+a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2\right)\lambda^2+\\
&\left.+\left(b^4+c^4+a^2b^2-4b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda+b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)\right]/16S^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^2,\\
z_{O_0}=&\left[c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda^4+\left(b^4+c^4-a^2b^2-4b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^3\right.\\
&+\left(-2a^4-2b^4+c^4+4a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^2+\\
&\left.+\left(a^4+c^4-a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2\right)\lambda+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right]/16S^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^2.
\end{aligned}$$

От (15) и (8) намираме общите уравнения на симетралите съответно на отсечките $A_0'B_0'$ и $A_0'C_0'$ във вида:

$$\begin{aligned}
&b^2\left[c^2a^4\lambda^5-2a^2b^2c^2\lambda^4-\left(a^6-a^4b^2-a^4c^2-b^4c^2+b^2c^4-2a^2c^4\right)\lambda^3+\right.\\
&+\left(c^6-c^4a^2-c^4b^2-a^4c^2+2a^4b^2-2a^2b^4\right)\lambda^2+b^2\left(b^4-a^2b^2-b^2c^2+2c^2a^2\right)\lambda-\\
&\left.-b^2c^2\left(b^2-c^2\right)\right]x-a^2\left[c^2a^2\left(c^2-a^2\right)\lambda^5+a^2\left(a^4-a^2b^2-c^2a^2+2b^2c^2\right)\lambda^4+\right.\\
&+\left(c^6-c^4a^2-c^4b^2-b^4c^2-2a^4b^2+2a^2b^4\right)\lambda^3-\left(b^6-b^4c^2-a^4c^2+a^2c^4-a^2b^4-2b^2c^2\right)\lambda^2-\\
&\left.-2a^2b^2c^2\lambda+b^4c^2\right]y-a^2b^2\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]\left(c^2\lambda^3-2a^2\lambda^2+2b^2\lambda-c^2\right)z=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&c^2\left[b^2c^2\left(b^2-c^2\right)\lambda^5+c^2\left(c^4-c^2a^2-c^2b^2+2a^2b^2\right)\lambda^4+\right.\\
&+\left(b^6-b^4a^2-b^4c^2-a^4b^2-2c^4a^2+2a^4c^2\right)\lambda^3-\left(a^6-a^4b^2-a^4c^2-a^4b^2+b^4c^2-2a^2b^4\right)\lambda^2-\\
&\left.-2a^2b^2c^2\lambda+a^4b^2\right]x+c^2a^2\left(b^2\lambda^3-2c^2\lambda^2+2a^2\lambda-b^2\right)\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]y+\\
&-\left[a^2b^2c^4\lambda^5-2a^4b^2c^2\lambda^4-a^2\left(c^6-c^4a^2-c^4b^2-a^4b^2+a^2b^4-2b^4c^2\right)\lambda^3+\right.\\
&+a^2\left(b^6-b^4a^2-b^4c^2-c^4b^2-2a^4c^2+2a^2c^4\right)\lambda^2+\\
&\left.+a^4\left(a^4-a^2b^2-a^2c^2+2b^2c^2\right)\lambda-a^4b^2\left(a^2-b^2\right)\right]z=0.
\end{aligned}$$

Решението на системата, определена от тези уравнения и равенството $x+y+z=1$, представя координатите на центъра $\bar{O}_0$ чрез равенствата:

(17)

$$x_{\bar{O}_0}=a^2\left\{a^2b^2c^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda^6+b^2\left(a^6+a^2b^4+b^2c^4-c^2a^4-2a^4b^2-b^4c^2-2c^4a^2\right)\lambda^5+\right.$$
$$+\left[-b^8+2a^2b^6-b^2c^6-c^2a^6+2b^6c^2-c^6a^2-a^4b^4+2c^4a^4+a^2b^2c^2\left(3a^2-2b^2+4c^2\right)\right]\lambda^4+$$
$$+\left[a^8+2b^2c^6-2c^2a^6-2a^6b^2+2b^6c^2+a^4b^4-4b^4c^4+c^4a^4-2a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\lambda^3+$$
$$+\left[-c^8-a^2b^6+2b^2c^6-a^6b^2-b^6c^2+2c^6a^2+2a^4b^4-c^4a^4+a^2b^2c^2\left(3a^2+4b^2-2c^2\right)\right]\lambda^2+$$
$$\left.+c^2\left(a^6-2a^2b^4-b^2c^4-2c^2a^4-a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\right)\lambda+a^2b^2c^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)\right\}/z_0,$$

$$y_{\bar{O}_0}=b^2\left\{a^2b^2c^2\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda^6+c^2\left(b^6-a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4-2a^4b^2-2b^4c^2-c^4a^2\right)\lambda^5+\right.$$
$$+\left[-c^8-a^2b^6+2b^2c^6-c^2a^6-a^6b^2+2c^6a^2+2a^4b^4-b^4c^4+a^2b^2c^2\left(4a^2+3b^2-2c^2\right)\right]\lambda^4+$$
$$+\left[b^8-2a^2b^6+2c^2a^6-2b^6c^2+2c^6a^2+a^4b^4+b^4c^4-4c^4a^4-2a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\lambda^3+$$
$$+\left[-a^8-b^2c^6+2c^2a^6+2a^6b^2-b^6c^2-c^6a^2-a^4b^4+2b^4c^4+a^2b^2c^2\left(-2a^2+3b^2+4c^2\right)\right]\lambda^2+$$
$$\left.+a^2\left(b^6-2a^2b^4-2b^2c^4-c^2a^4+a^4b^2-b^4c^2+c^4a^2\right)\lambda+a^2b^2c^2\left(a^2-b^2+c^2\right)\right\}/z_0,$$

$$z_{\bar{O}_0}=c^2\left\{a^2b^2c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda^6+a^2\left(c^6+a^2b^4-b^2c^4+c^2a^4-a^4b^2-2b^4c^2-2c^4a^2\right)\lambda^5+\right.$$
$$+\left[-a^8-a^2b^6-b^2c^6+2c^2a^6+2a^6b^2-b^6c^2+2b^4c^4-c^4a^4+a^2b^2c^2\left(-2a^2+4b^2+3c^2\right)\right]\lambda^4+$$
$$+\left[c^8+2a^2b^6-2b^2c^6+2a^6b^2-2c^6a^2-4a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4-2a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]\lambda^3+$$
$$+\left[-b^8+2a^2b^6-c^2a^6-a^6b^2+2b^6c^2-c^6a^2-b^4c^4+2c^4a^4+a^2b^2c^2\left(4a^2-2b^2+3c^2\right)\right]\lambda^2+$$
$$\left.+b^2\left(c^6-a^2b^4-2b^2c^4-2c^2a^4+a^4b^2+b^4c^2-c^4a^2\right)\lambda+a^2b^2c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right\}/z_0,$$

където $z_0=16S^2\left(-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2\right)\left(\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2\right)\left(a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2\right)$.

Разстоянието между две точки $P\left(x_P,y_P,z_P\right)$ и $Q\left(x_Q,y_Q,z_Q\right)$ от равнината на ΔABC се намира по формулата

(18) $$PQ^2=-\left(y_P-y_Q\right)\left(z_P-z_Q\right)a^2-\left(z_P-z_Q\right)\left(x_P-x_Q\right)b^2-\left(x_P-x_Q\right)\left(y_P-y_Q\right)c^2.$$

С помощта на равенствата (16), (17) и (18) за радиусите r_0 и $\overline{r}_0$ съответно на описаните около триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ получаваме формулите:

(19) $$r_0^2=\frac{(\lambda+1)^2}{16S^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^4}\times$$
$$\times\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right],$$

(20) $$\overline{r}_0^2=\frac{(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^2a^4b^4c^4\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]}{16S^2\left(-\lambda a^2+b^2+\lambda^2c^2\right)^2\left(\lambda^2a^2-\lambda b^2+c^2\right)^2\left(a^2+\lambda^2b^2-\lambda c^2\right)^2}\times$$
$$\times\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right],$$

От (19) и (20) следва

$$\overline{r}_0^2 - r_0^2 = \frac{\lambda(\lambda+1)^2\varphi(\lambda)\psi(\lambda)}{16S^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^4}\times$$

$$\times\frac{\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]}{\left(a^2\lambda^2-b^2\lambda+c^2\right)^2\left(b^2\lambda^2-c^2\lambda+a^2\right)^2\left(c^2\lambda^2-a^2\lambda+b^2\right)^2},$$

където $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ са полиномите съответно от (11) и (13).

Тъй като квадратните по отношение на λ тричлени $a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2$, $b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2$ и $c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2$ имат дискриминанта $-16S^2<0$, те приемат само положителни стойности. Затова $\overline{r}_0=r_0$ само когато е изпълнено едно от равенствата $\varphi(\lambda)=0$ и $\psi(\lambda)=0$. От разгледаните по-рано въпроси, свързани с тези равенства, следва, че $\overline{r}_0=r_0$ тогава и само тогава, когато триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A_0'B_0'C_0'$ са равнолицеви.

Сега от координатите (16) и (17) на центровете и радиусите (19) и (20) намираме уравненията на описаните окръжности k_0 и $\overline{k}_0$ съответно за $\Delta A_0'B_0'C_0'$ и $\Delta A_0B_0C_0$:

(21) $$\overline{k}_0: \begin{aligned}&b^2c^2\lambda\left(c^2\lambda^2-a^2\lambda+b^2\right)\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]x^2+\\&+c^2a^2\lambda\left(a^2\lambda^2-b^2\lambda+c^2\right)\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]y^2+\\&+a^2b^2\lambda\left(b^2\lambda^2-c^2\lambda+a^2\right)\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]z^2+\\&+c^2g_{xy}xy+a^2g_{yz}yz+b^2g_{zx}zx=0,\end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned}g_{xy}&=a^2b^2c^2\lambda^6-a^2\left(c^4+a^2b^2-c^2a^2\right)\lambda^5+\left(-a^6+a^4b^2+a^2b^4-b^4c^2+b^2c^4+c^2a^4\right)\lambda^4-\\&-c^2\left(c^4+2a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^3+\left(-b^6+a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+c^4a^2-c^2a^4\right)\lambda^2-\\&-b^2\left(c^4+a^2b^2-b^2c^2\right)\lambda+a^2b^2c^2,\\g_{yz}&=a^2b^2c^2\lambda^6-b^2\left(a^4-a^2b^2+b^2c^2\right)\lambda^5+\left(-b^6+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^2a^4-c^4a^2\right)\lambda^4-\\&-a^2\left(a^4+2b^2c^2-a^2b^2-c^2a^2\right)\lambda^3+\left(-c^6+a^4b^2-a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2\right)\lambda^2-\\&-c^2\left(a^4+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda+a^2b^2c^2,\\g_{zx}&=a^2b^2c^2\lambda^6-c^2\left(b^4-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^5+\left(-c^6-a^4b^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4+c^4a^2\right)\lambda^4-\\&-b^2\left(b^4+2c^2a^2-a^2b^2-b^2c^2\right)\lambda^3+\left(-a^6+a^4b^2+b^4c^2-b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4\right)\lambda^2-\\&-a^2\left(b^4+a^2b^2+c^2a^2\right)\lambda+a^2b^2c^2.\end{aligned}$$

(22) $$k_0: \begin{aligned}&\lambda\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]x^2+\lambda\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]y^2+\\&+\lambda\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]z^2+\left[c^2\lambda^4+\left(b^2-c^2\right)\lambda^3+c^2\lambda^2+\left(a^2-c^2\right)\lambda+c^2\right]xy+\\&+\left[a^2\lambda^4+\left(c^2-a^2\right)\lambda^3+a^2\lambda^2+\left(b^2-a^2\right)\lambda+a^2\right]yz+\\&+\left[b^2\lambda^4+\left(a^2-b^2\right)\lambda^3+b^2\lambda^2+\left(c^2-b^2\right)\lambda+b^2\right]zx=0,\end{aligned}$$

Окръжностите k_0 и $\overline{k}_0$ съвпадат, когато коефициентите пред x^2, y^2 и z^2 в съответните им уравнения са пропорционални, т.е. изпълнени са равенствата

$$\frac{b^2c^2\lambda\left(c^2\lambda^2-a^2\lambda+b^2\right)\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]}{\lambda\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]}=$$
$$=\frac{c^2a^2\lambda\left(a^2\lambda^2-b^2\lambda+c^2\right)\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]}{\lambda\left[b^2\lambda^2-\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda+c^2\right]}=$$
$$=\frac{a^2b^2\lambda\left(b^2\lambda^2-c^2\lambda+a^2\right)\left[a^2\lambda^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\lambda+b^2\right]}{\lambda\left[c^2\lambda^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)\lambda+a^2\right]}.$$

Оттук следва, че са изпълнени едновременно равенствата
$\left(a^4-b^2c^2\right)\lambda^2=b^4-c^2a^2$, $\left(b^4-c^2a^2\right)\lambda^2=c^4-a^2b^2$, $\left(c^4-a^2b^2\right)\lambda^2=a^4-b^2c^2$.
Последните равенства са изпълнени за всяко λ тогава и само тогава, когато $a=b=c$. Освен това уравненията спрямо λ нямат общи корени. Следователно окръжностите k_0 и $\overline{k}_0$ съвпадат тогава и само тогава, когато ΔABC е равностранен (Фиг. 6).

5. Крива от втора степен през точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0'. Установихме, че, когато към точките A_0, B_0, C_0 добавим техните изогонално спрегнати A_0', B_0' и C_0', шестте точки лежат на една окръжност само когато ABC е равностранен триъгълник. Затова може да се предположи, че в общия случай тези шест точки лежат на крива от втора степен. По този начин възниква задача М+569, която е формулирана в брой 1 от 2017 г. на сп. Математика плюс по следния начин: *Даден е ΔABC. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно върху правите BC, CA и AB, така че са изпълнени равенствата $\overline{BA_1}:\overline{CA_1}=\overline{CB_1}:\overline{AB_1}=\overline{AC_1}:\overline{BC_1}=\lambda$ ($\lambda\neq\pm1$). Нека $A_0=BB_1\cap CC_1$, $B_0=CC_1\cap AA_1$ и $C_0=AA_1\cap BB_1$. Ако точките A_0', B_0' и C_0' са изогонално спрегнатите съответно на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC, да се докаже, че точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' лежат на крива от втора степен.*

Всяка крива от втора степен има уравнение от вида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0. \tag{23}$$

След заместване на координатите на точките A_0, B_0, C_0, A_0' и B_0' от (2) и (8) в това уравнение получаваме системата

$$\begin{aligned}
&\lambda^2a_{11}+\lambda^4a_{22}+a_{33}-2\lambda^3a_{12}+2\lambda^2a_{23}-2\lambda a_{31}=0,\\
&a_{11}+\lambda^2a_{22}+\lambda^4a_{33}-2\lambda a_{12}-2\lambda^3a_{23}+2\lambda^2a_{31}=0,\\
&\lambda^4a_{11}+a_{22}+\lambda^2a_{33}+2\lambda^2a_{12}-2\lambda a_{23}-2\lambda^3a_{31}=0,\\
&\lambda^2a^4a_{11}+b^4a_{22}+\lambda^4c^4a_{33}-2\lambda a^2b^2a_{12}+2\lambda^2b^2c^2a_{23}-2\lambda^3c^2a^2a_{31}=0,\\
&\lambda^4a^4a_{11}+\lambda^2b^4a_{22}+c^4a_{33}-2\lambda^3a^2b^2a_{12}-2\lambda b^2c^2a_{23}+2\lambda^2c^2a^2a_{31}=0.
\end{aligned}$$

От тази система и (23) получаваме, че уравнението на кривата k, минаваща през точките A_0, B_0, C_0, A_0' и B_0', е следното

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(b^2+\lambda c^2\right)\left(\lambda^2 b^2-c^2\right)x^2+\lambda\left(c^2+\lambda a^2\right)\left(\lambda^2 c^2-a^2\right)y^2+\\
(24)\qquad & k:+\lambda\left(a^2+\lambda b^2\right)\left(\lambda^2 a^2-b^2\right)z^2+\left(\lambda^3-1\right)\left(\lambda a^2+c^2\right)\left(\lambda c^2+b^2\right)xy+\\
&+\left(\lambda^3-1\right)\left(\lambda b^2+a^2\right)\left(\lambda a^2+c^2\right)yz+\left(\lambda^3-1\right)\left(\lambda c^2+b^2\right)\left(\lambda b^2+a^2\right)zx=0.
\end{aligned}$$

След заместване на координатите на C_0' от (8) се установява, че те удовлетворяват уравнението (24) на кривата k. С това е установено, че точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' лежат на една крива от втора степен.

6. Център на кривата k**.** Нека кривата k има център $\Omega\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Ще определим координатите на Ω. В [3] е показано, че координатите на центъра $\Omega\left(x_0, y_0, z_0\right)$ на крива с уравнение (23) са решение на системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l}
\left(a_{11}-a_{31}\right)x+\left(a_{12}-a_{23}\right)y+\left(a_{31}-a_{33}\right)z=0,\\
\left(a_{12}-a_{31}\right)x+\left(a_{22}-a_{23}\right)y+\left(a_{23}-a_{33}\right)z=0,\\
x+y+z=1.
\end{array}\right.$$

След решаване на последната система по отношение на уравнението (16) получаваме следните представяния на координатите на Ω:

$$(25)\qquad \begin{aligned}
x_0&=-\frac{\left(\lambda a^2+c^2\right)\left(\lambda b^2+a^2\right)\tau_a}{\left(\lambda^2-\lambda+1\right)f(\lambda)},\\
y_0&=-\frac{\left(\lambda b^2+a^2\right)\left(\lambda c^2+b^2\right)\tau_b}{\left(\lambda^2-\lambda+1\right)f(\lambda)},\\
z_0&=-\frac{\left(\lambda c^2+b^2\right)\left(\lambda a^2+c^2\right)\tau_c}{\left(\lambda^2-\lambda+1\right)f(\lambda)},
\end{aligned}$$

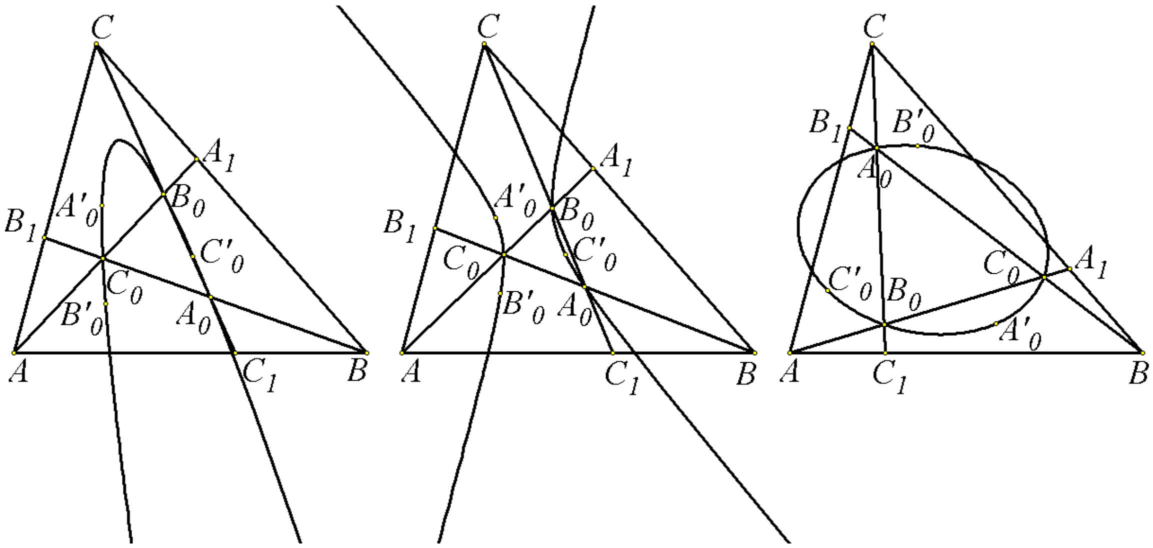
където

$$\begin{aligned}
&f(\lambda)=(ab+bc+ca)(-ab+bc+ca)(ab-bc+ca)(ab+bc-ca)\lambda^5+\\
&+\left(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4+2a^2b^6+2b^2c^6+2c^2a^6-2a^6b^2-2b^6c^2-2c^6a^2\right)\lambda^4-\\
(26)\qquad &-\left(a^8+b^8+c^8-a^4b^4-b^4c^4-c^4a^4+2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4\right)\lambda^3-\\
&-\left(a^8+b^8+c^8-a^4b^4-b^4c^4-c^4a^4+2a^4b^2c^2+2a^2b^4c^2+2a^2b^2c^4\right)\lambda^2+\\
&+\left(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4-2a^2b^6-2b^2c^6-2c^2a^6+2a^6b^2+2b^6c^2+2c^6a^2\right)\lambda+\\
&+(ab+bc+ca)(-ab+bc+ca)(ab-bc+ca)(ab+bc-ca).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau_a=\left(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^5+\left(a^4-b^4+c^4-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^4+\left(a^2b^2+b^2c^2-3c^2a^2\right)\lambda^3\\
&+\left(b^2c^2+c^2a^2-3a^2b^2\right)\lambda^2+\left(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda-a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2,\\
&\tau_b=\left(-a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^5+\left(a^4+b^4-c^4+a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^4+\left(b^2c^2+c^2a^2-3a^2b^2\right)\lambda^3\\
&+\left(a^2b^2+c^2a^2-3b^2c^2\right)\lambda^2+\left(-a^4+b^4+c^4-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda+a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2,\\
&\tau_c=\left(-a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^5+\left(-a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^4+\left(a^2b^2+c^2a^2-3b^2c^2\right)\lambda^3\\
&+\left(a^2b^2+b^2c^2-3c^2a^2\right)\lambda^2+\left(a^4-b^4+c^4+a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.
\end{aligned}$$

7. Вид на кривата k. За да определим вида на кривата k, заместваме $z=-x-y$ в (24). Получаваме следното квадратно уравнение

$$\begin{aligned}
&\left[b^2c^2\lambda^5-\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\lambda^4-\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)\lambda^3+\right.\\
&\left.+\left(b^4-b^2c^2+c^4\right)\lambda^2+\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\lambda-a^2b^2\right]x^2+\\
&+\left[\left(a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^5+\left(a^4+b^4-c^4-3a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^4-\right.\\
&-\left(2a^4-a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2\right)\lambda^3+\left(2b^4-a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda^2-\\
&\left.-\left(a^4+b^4-c^4-3a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\lambda+a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2+a^2c^2-b^2c^2+a^2b^2\right]xy\\
&+\left[a^2b^2\lambda^5-\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-a^2\right)\lambda^4-\left(c^4-c^2a^2+a^4\right)\lambda^3+\right.\\
&\left.+\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)\lambda^2+\left(a^2-b^2\right)\left(c^2-a^2\right)\lambda-c^2a^2\right]y^2=0.
\end{aligned}$$



Фиг. 11

Дискриминантата на последното уравнение е следната

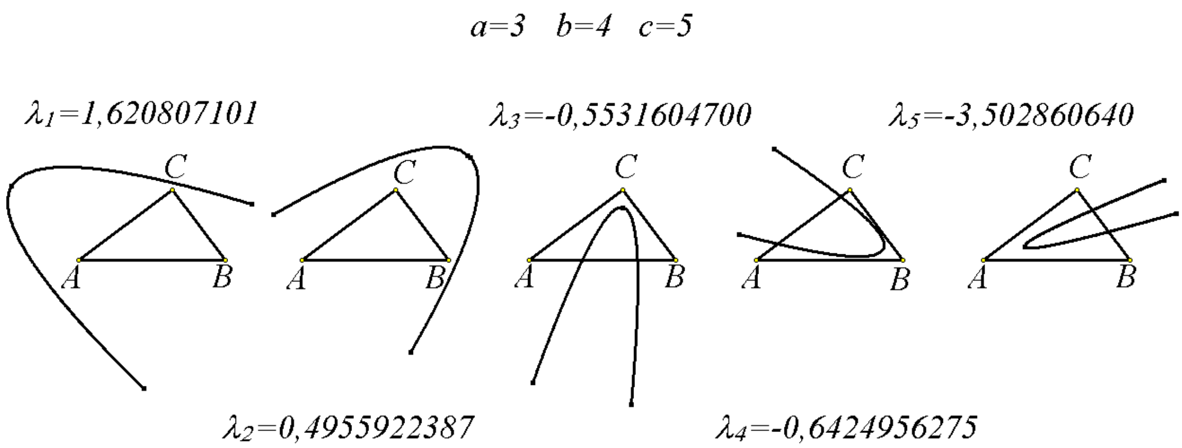
$$(27)\qquad D=-(\lambda+1)\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^2 f(\lambda),$$

където $f(\lambda)$ е полиномът (26).

От (27) се вижда, че релациите $D=0, D>0$ и $D<0$ са изпълнени съответно при $f(\lambda)=0$, $f(\lambda)<0$ и $f(\lambda)>0$. В съответните случаи кривата k е парабола, хипербола и елипса (Фиг. 11).

8. Изследване на броя на параболите. Вече установихме, че кривата k е парабола при онези стойности на λ, за които е изпълнено равенството $f(\lambda)=0$. Полиномът $f(\lambda)$ е от пета степен, затова той има най-много пет реални корена. Освен това той може да има корени, които нямат геометричен смисъл. Според броя и вида на реалните корени на $f(\lambda)$ са възможни шест случая за параболите, съответстващи на даден триъгълник.

1) Съществуват триъгълници, на които съответстват точно пет параболи (Фиг. 12).



Фиг. 12

Ако $a=b=c$, т.е. ΔABC е равностранен, имаме $f(\lambda)=-3c^8(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3$. Корените на последния полином нямат геометричен смисъл. Затова на равностранния триъгълник не съответстват параболи.

По-нататък ще предполагаме, че ΔABC не е равностранен. Сега да представим $f(\lambda)$ във вида $f(\lambda)=f_1(\lambda)(\lambda-1)+r_1$, където

$$f_1(\lambda)=\bar{B}_4\lambda^4+\bar{B}_3\lambda^3+\bar{B}_2\lambda^2+\bar{B}_1\lambda+\bar{B}_0,$$

$$\bar{B}_4=(ab+bc+ca)(-ab+bc+ca)(ab-bc+ca)(ab+bc-ca),$$

$$\bar{B}_3=-2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2-a^2b^4-b^2c^4-c^2a^4\right),$$

$$\bar{B}_2=-\left(a^8+b^8+c^8-b^4c^4-c^4a^4-a^4b^4+2a^6b^2+2b^6c^2+2c^6a^2-2a^2b^6-2b^2c^6-2c^2a^6\right),$$

$$\bar{B}_1=-2\big[a^8+b^8+c^8-\left(b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4\right)+a^6b^2+b^6c^2+c^6a^2-$$
$$-\left(a^2b^6+b^2c^6+c^2a^6\right)+a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\big],$$

$$\bar{B}_0=-\left[2\left(a^8+b^8+c^8\right)-3\left(b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4\right)+2a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right],$$

$$r_1=-2\left(a^8+b^8+c^8-b^4c^4-c^4a^4-a^4b^4\right).$$

От израза за r_1 се вижда, че равенството $r_1=0$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $a=b=c$. Следователно $f(1)=0$ само когато ΔABC е равностранен. Затова, когато $\lambda=1$ е корен на $f(\lambda)$, не се получават триъгълници, на които съответстват параболи.

Сега представяме $f(\lambda)$ във вида $f(\lambda)=f_2(\lambda)(\lambda+1)+r_2$, където

$$f_2(\lambda)=\bar{B}_4\lambda^4+\bar{C}_3\lambda^3+\bar{C}_2\lambda^2+\bar{C}_1\lambda+\bar{C}_0,$$

$$\bar{C}_3=\bar{C}_1=2\left[b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4-a^6b^2-b^6c^2-c^6a^2+a^2b^6+b^2c^6+c^2a^6-a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right],$$

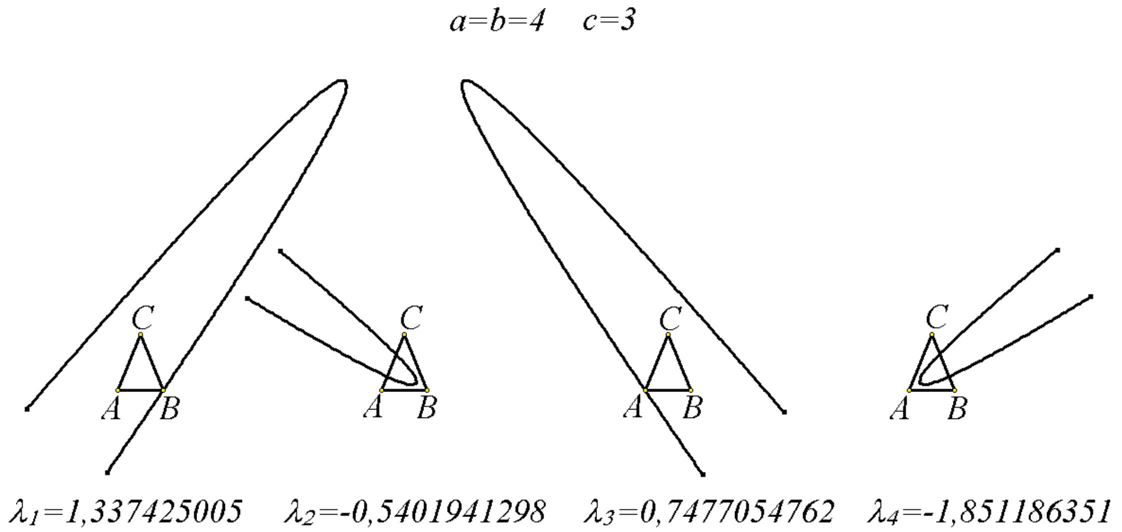
$$\bar{C}_2=-\left(a^8+b^8+c^8+b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4+2a^6b^2+2b^6c^2+2c^6a^2-2a^2b^6-2b^2c^6-2c^2a^6\right),$$

$$\bar{C}_0=-\left[b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4-4\left(a^6b^2+b^6c^2+c^6a^2-a^2b^6-b^2c^6-c^2a^6\right)-2a^2b^2c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\right],$$

$$r_2=4\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

От израза за r_2 се вижда, че равенството $r_2 = 0$ е изпълнено тогава и само тогава, когато ΔABC е равнобедрен. При $r_2 = 0$ е възможно полиномът $f_2(\lambda)$ да има четири реални корена. Така получаваме

2) Съществуват триъгълници, на които съответстват точно четири параболи (Фиг. 13).



Фиг. 13

По-нататък нека $a = b$ и $f_2(\lambda) = f_3(\lambda)(\lambda+1) + r_3$, където

$$f_3(\lambda) = -b^4\left(b^4 - 4b^2c^2\right)\lambda^3 + b^4\left(3b^4 - 8b^2c^2 + 2c^4\right)\lambda^2 -$$
$$-\left(6b^8 + c^8 + 4b^4c^4 - 8b^6c^2\right)\lambda + 8b^8 + c^8 + 6b^4c^4 - 12b^6c^2,$$
$$r_3 = -\left(3b^2 - 2bc + c^2\right)\left(3b^2 + 2bc + c^2\right)\left(b^2 - c^2\right)^2.$$

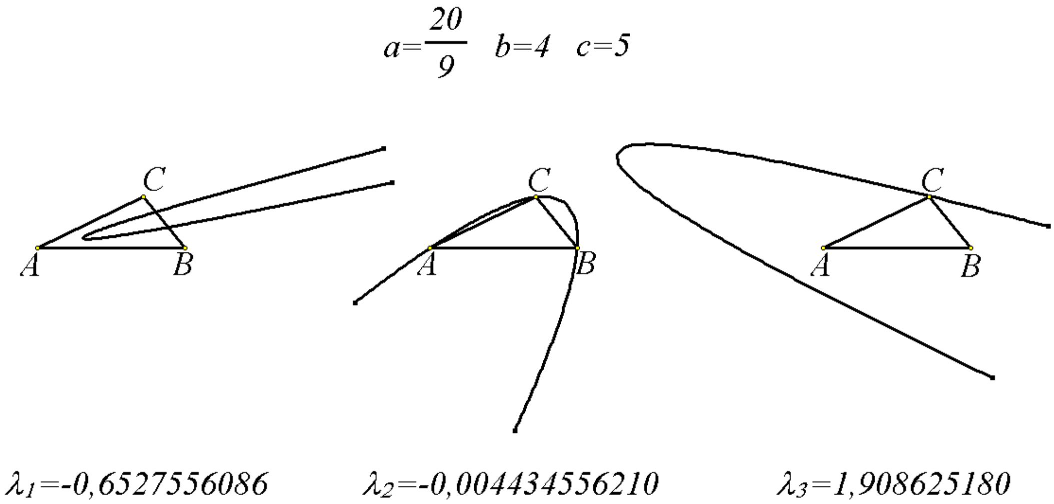
От израза за r_2 се вижда, че равенството $r_2 = 0$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $b = c$, т.е. когато ΔABC е равностранен. Следователно $\lambda = -1$ е най-много двукратен корен на $f(\lambda)$, като при двукратен корен не се получават триъгълници, на които съответстват параболи.

Сега да предположим, че $\lambda = 0$ е корен на $f(\lambda)$. Това е възможно само когато $\bar{B}_4 = 0$. Последното равенство е изпълнено в един от случаите $a = \dfrac{bc}{b+c}$, $b = \dfrac{ca}{c+a}$ или $c = \dfrac{ab}{a+b}$. Ако $a = \dfrac{bc}{b+c}$, то $f(\lambda) = -\dfrac{\left(b^2+bc+c^2\right)^2\lambda}{(b+c)^8}g(\lambda)$, където

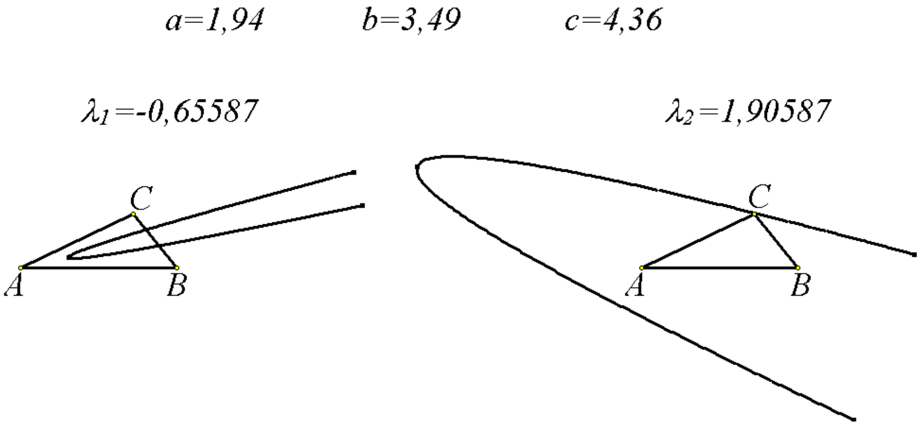
$$g(\lambda) = 4b^3c^3(b+c)^3\left(b^3 - c^3 + b^2c - 2bc^2\right)\lambda^3 +$$
$$+\left(b^6 + c^6 + 3b^3c^3 + 4b^4c^2 + 4b^2c^4 + 3b^5c + 3bc^5\right)\left(b^6 + c^6 - 5b^3c^3 + 3b^5c + 3bc^5\right)\lambda^2 +$$
$$+\left(b^6 + c^6 + 3b^3c^3 + 4b^4c^2 + 4b^2c^4 + 3b^5c + 3bc^5\right)\left(b^6 + c^6 - 5b^3c^3 + 3b^5c + 3bc^5\right)\lambda -$$
$$-4b^3c^3(b+c)^3\left(b^3 - c^3 + 2b^2c - bc^2\right).$$

Когато $g(\lambda)$ има реален корен, получаваме

3) Съществуват триъгълници, на които съответстват точно три параболи (Фиг. 14).



Фиг. 14



Фиг. 15

Полиномът $g(\lambda)$ има корен $\lambda = 0$ тогава и само тогава, когато $b^3 - c^3 + 2b^2c - bc^2 = 0$, т.е. $b^3 = c^3 - 2b^2c + bc^2$. Така получаваме

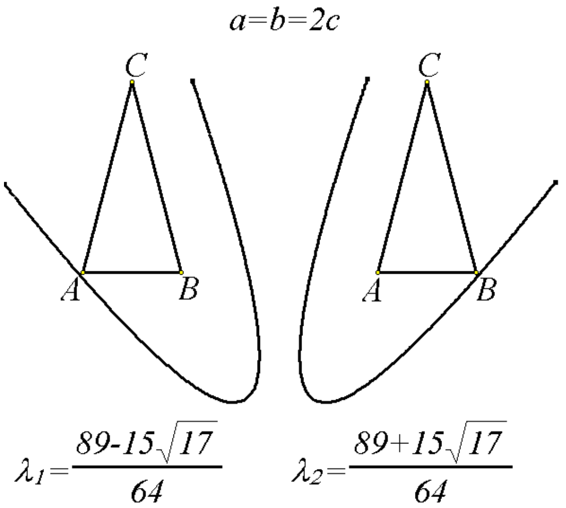
4) Съществуват триъгълници, на които съответстват точно две параболи (Фиг. 15, 16).

След няколкократно заместване на равенството $b^3 = c^3 - 2b^2c + bc^2$ в $g(\lambda)$ получаваме $g(\lambda) = -bc^4(b+c)\lambda h(\lambda)$, където

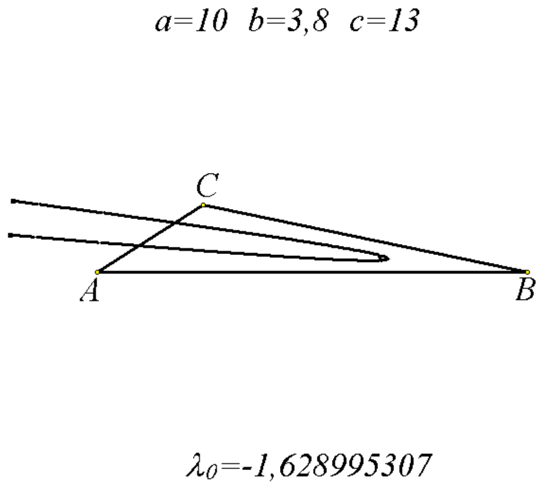
$$h(\lambda) = 4b^3(b+c)^3\lambda^2 + 5c^3(2b+c)(b^2 - bc - c^2)\lambda + 5c^3(2b+c)(b^2 - bc - c^2).$$

Полиномът $h(\lambda)$ има корен $\lambda = 0$ тогава и само тогава, когато $b^2 - bc - c^2 = 0$. Като вземем предвид, че е изпълнено и $b^3 - c^3 + 2b^2c - bc^2 = 0$, установяваме, че двете равенства са изпълнени само когато $b = c = 0$. Тъй като това е невъзможно, то $\lambda = 0$ не е корен на $h(\lambda)$. Следователно $\lambda = 0$ е най-много двукратен корен на $f(\lambda)$.

Остава да разгледаме още един случай. Този, при който $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ едновременно са корени на $f(\lambda)$. От предишните резултати следва, че това се случва, когато са изпълнени едновременно равенствата $a = \dfrac{bc}{b+c}$ и $b = c$. След заместване на тези равенства в (26) получаваме $f(\lambda) = \dfrac{9c^8}{256}\lambda(\lambda+1)(32\lambda^2 - 89\lambda + 32)$. Оттук се вижда, че останалите корени на $f(\lambda)$ са $\lambda_1 = \dfrac{89 - 15\sqrt{17}}{64}$ и $\lambda_2 = \dfrac{89 + 15\sqrt{17}}{64}$. Очевидно за всеки такъв триъгълник λ_1 и λ_2 са едни и същи (Фиг. 16).



Фиг. 16



Фиг. 17

Тъй като $f(\lambda)$ е полином от нечетна степен, очакваме да съществува случай, в който той има само един реален корен. Така стигаме до свойството

5) Съществуват триъгълници, на които съответства точно една парабола (Фиг. 17).

Накрая, като вземем предвид направените подробни изследвания върху корените на $f(\lambda)$, можем да формулираме и следното свойство

6) От всички триъгълници единствено на равностранните не съответства нито една парабола.

Последното свойство се съгласува с това, че само при равностранните триъгълници кривата k е окръжност.

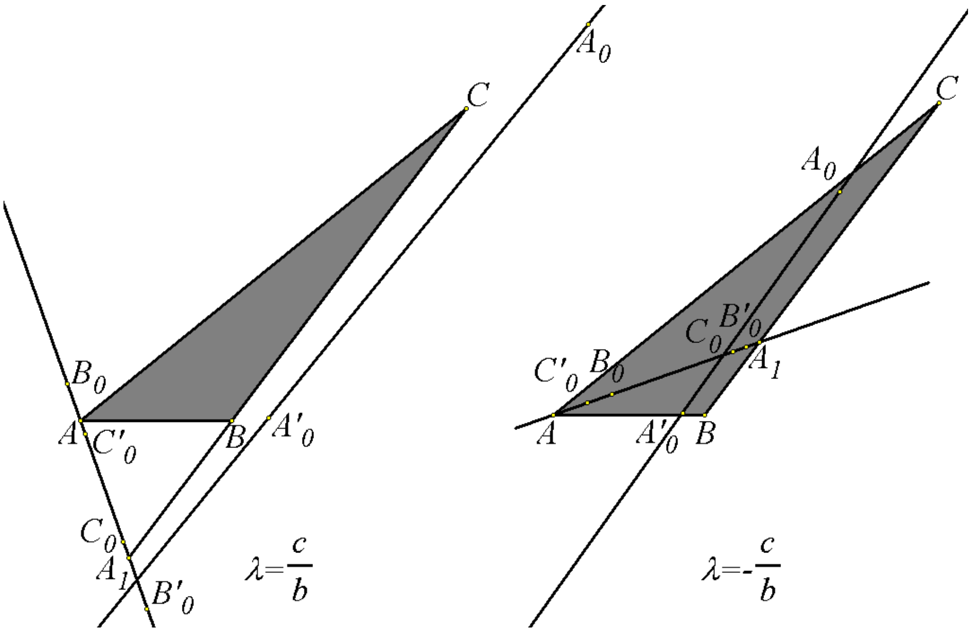
9. Изследване на изродените криви. Кривата k е изродена, когато точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' лежат на една права или върху две прави. Тъй като $\Delta A_0B_0C_0$

винаги съществува, шестте точки никога не лежат на една права. От друга страна, когато и трите точки A_0', B_0' и C_0' съществуват, те образуват триъгълник. Следователно не е възможно пет от точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' да лежат на една права. Нека точките B_0, B_0' и C_0 лежат на една права. Тогава от координатите (2) и (8) и равенството (3) получаваме $(\lambda^3+1)(b^2\lambda^2-c^2)=0$. Следователно точките B_0, B_0' и C_0 лежат на една права тогава и само тогава, когато

(28) $$b^2\lambda^2-c^2=0.$$

По същия начин се установява, че двете тройки точки B_0, B_0', C_0' и B_0, B_0', A_1 са колинеарни тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството (28). Като вземем предвид геометричния смисъл на равенството (28), заключаваме: *Точките A_1, B_0, B_0', C_0 и C_0' лежат на една права l_a тогава и само тогава, когато A_1 е пета на вътрешната или на външната ъглополовяща при върха A на ΔABC.*

От последният извод получаваме, че когато AA_1 е ъглополовяща на ΔABC, кривата k се състои от ъглополовящата AA_1 и правата A_0A_0' (Фиг. 18).



Фиг. 18

Уравненията на правите A_0A_0' и B_0B_0' са следните:

$$A_0A_0':(c^2\lambda^4-b^2)x+\lambda(c^2\lambda^2-a^2)y+\lambda(a^2\lambda^2-b^2)z=0,$$

$$B_0B_0':\lambda(b^2\lambda^2-c^2)x+(a^2\lambda^4-c^2)y+\lambda(a^2\lambda^2-b^2)z=0.$$

От тези уравнения намираме, че общата точка E на правите (когато съществува) има следните координати

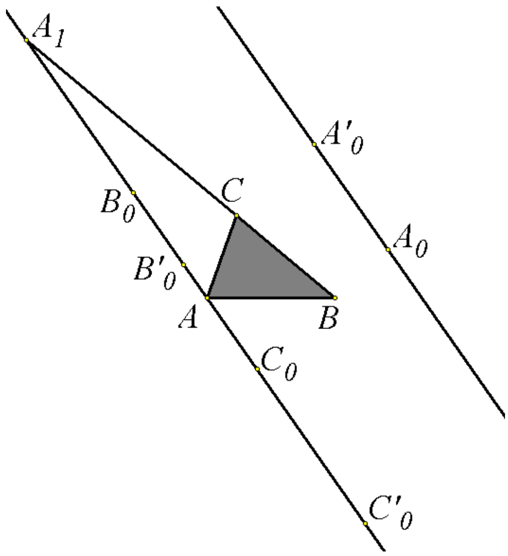
$$x_E = \frac{\lambda\left(c^2 - a^2\lambda\right)}{c^2\lambda^3 - \left(c^2 + a^2\right)\lambda^2 + \left(b^2 + c^2\right)\lambda - b^4}, y_E = \frac{\lambda\left(c^2\lambda - b^2\right)}{c^2\lambda^3 - \left(c^2 + a^2\right)\lambda^2 + \left(b^2 + c^2\right)\lambda - b^4},$$

$$(29) \qquad z_E = \frac{c^2\left(\lambda^3 - 1\right)}{c^2\lambda^3 - \left(c^2 + a^2\right)\lambda^2 + \left(b^2 + c^2\right)\lambda - b^4}.$$

Точката E не съществува тогава и само тогава, когато $c^2\lambda^3 - \left(c^2 + a^2\right)\lambda^2 + \left(b^2 + c^2\right)\lambda - b^4 = 0$. Оттук намираме

$$(30) \qquad a = \frac{1}{\lambda}\sqrt{c^2\lambda^3 - c^2\lambda^2 + \left(b^2 + c^2\right)\lambda - c^2}.$$

Ако $\lambda = -\frac{c}{b}$, подкоренната величина в (30) е отрицателна и ΔABC не съществува. Ако $\lambda = \frac{c}{b}$, имаме $a = \frac{\sqrt{bc\left(b^4 - b^3c + b^2c^2 - bc^3 + c^4\right)}}{bc}$. В този случай правите AA_1 и A_0A_0' са успоредни, т.е. кривата k се състои от две успоредни прави (Фиг. 19).

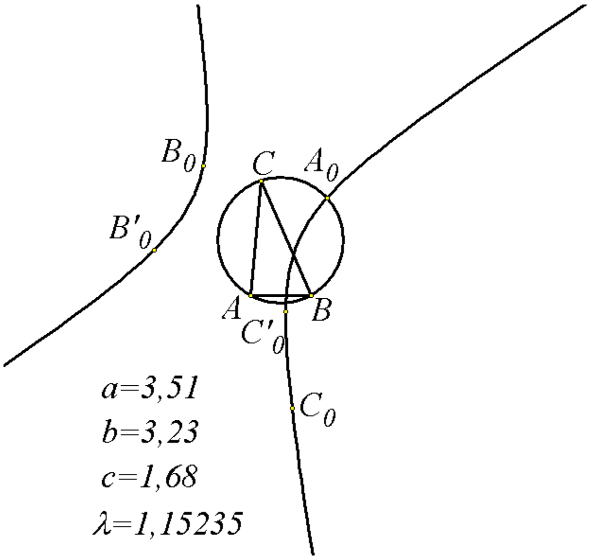


Фиг. 19

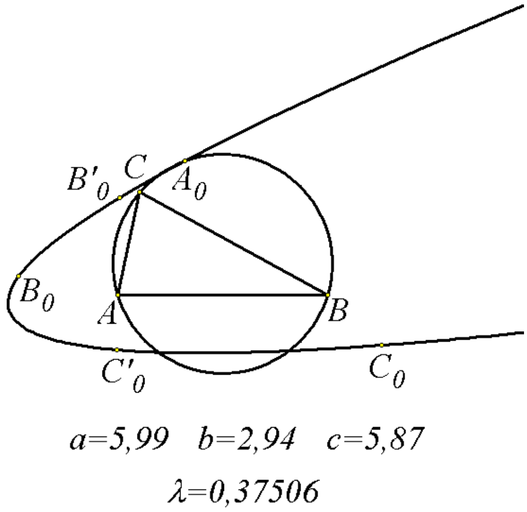
10. Изследване на кривата k, когато една от точките A_0', B_0' и C_0' не съществува. Нека точката A_0' не съществува. Както беше отбелязано по-рано, това се случва, когато е изпълнено равенството $-\lambda a^2 + b^2 + \lambda^2c^2 = 0$. Оттук имаме $a = \frac{\sqrt{\lambda\left(c^2\lambda^2 + b^2\right)}}{\lambda}$. След заместване на a от това равенство в коефициентите на полинома $f(\lambda)$ от (26) се получава равенството $f(\lambda) = -\frac{\lambda+1}{\lambda^2}u^2(\lambda)$, където

$$(31) \qquad u(\lambda) = b^2c^2\lambda^4 - c^2\left(2b^2 + c^2\right)\lambda^3 + b^2c^2\lambda^2 - b^2\left(2b^2 + c^2\right)\lambda + b^2c^2.$$

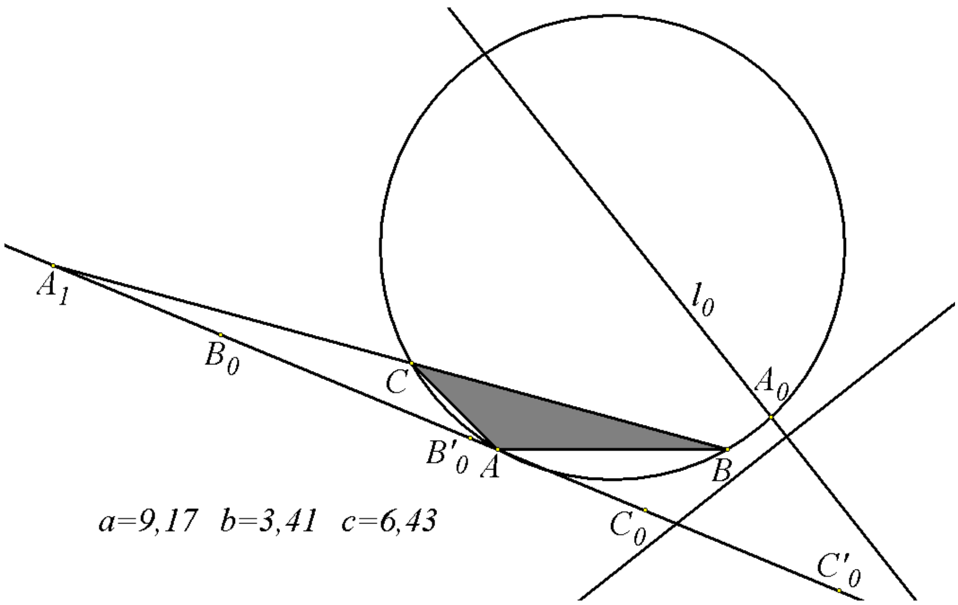
Сега от (27) следва, че: 1) когато полиномът $u(\lambda)$ няма реални корени, кривата k е хипербола (Фиг. 20); 2) когато полиномът $u(\lambda)$ има реални корени, кривата k е парабола (Фиг. 21); 3) кривата k не може да е елипса.



Фиг. 20



Фиг. 21



Фиг. 22

Както бе отбелязано, кривата k би могла да се състои от две прави, когато $\lambda = -\dfrac{c}{b}$ или $\lambda = \dfrac{c}{b}$. Като заместим тези стойности на λ в (31), получаваме съответно

$$u\left(-\frac{c}{b}\right) = -\frac{c\left(b^2+bc+c^2\right)^2\left(b^2-bc+c^2\right)}{b^3},\; u\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{c\left(b^2+bc+c^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)^2}{b^3}.$$

Първият случай е невъзможен, а във втория – имаме $a = \frac{\sqrt{bc(b^4 + c^4)}}{bc}$ (Фиг. 22). В този случай едната права е външната ъглополовяща при върха A, а като втора права разглеждаме правата l_0 през A_0, която е перпендикулярна на Симсъновата й права (Фиг. 22).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарднер, М. Математически развлечения. Том 3. София: Наука и изкуство, 1980.

2. Паскалев, Г., И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. София: Народна просвета, 1985.

3. Гроздев, С., В. Ненков. Конични сечения с колинеарни центрове. Математика и математическо образование, 44, 291-298, 2015.