М +СЕМИНАР

ПРЕБРОЯВАНЕ НА РЕАЛНИТЕ НУЛИ НА ПОЛИНОМИ ПО МЕТОДА НА ЩУРМ

проф. Сава Гроздев, доц. Веселин Ненков

В процеса на някои изследвания, изложени в [1], са получени следните два полинома

(1) $$\varphi(\lambda) = M\lambda^4 - 2N\lambda^3 + K\lambda^2 - 2M\lambda + N,$$

(2) $$\psi(\lambda) = T\lambda^6 - U\lambda^5 + 2V\lambda^4 - W\lambda^3 + 2U\lambda^2 - V\lambda + T,$$

където λ е реална променлива, а коефициентите зависят от страните a, b и c на произволен триъгълник по следния начин

(3) $$M = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 - 3a^2b^2c^2, N = a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 - 3a^2b^2c^2,$$
$$K = a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2,$$

(4) $$T = 2a^2b^2c^2, U = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3a^2b^2c^2,$$
$$V = a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 + 3a^2b^2c^2, W = a^6 + b^6 + c^6 + 11a^2b^2c^2.$$

Някои резултати в [1] са обосновани със свойства на полиномите $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, но самите свойства не са доказани в [1]. Затова една от целите на настоящата статия е да се попълни тази празнина. Другата цел е да покажем един метод за изследване на броя корените на полиноми, който води до обосноваване на свойствата на $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, използвани в [1].

1. Вариации в наредени $n-$орки от реални числа. Разглеждаме наредената $n-$орка реални числа $(a_1, a_2 \dots, a_n)$, при което $a_i \neq 0\ (i = 1, 2, \dots, n)$. Ако два последователни члена a_i и $a_{i+1}\ (i = 1, 2, \dots, n-1)$ на тази $n-$орка имат различни знаци, ще казваме, че между тях има вариация. За всяка наредена $n-$орка се поставя въпросът за броя на вариациите, които се съдържат в нея. Например в следващите числови подреждания $(1, -2, 3, 5, 2)$, $(-2, -4, -7, -3)$, $(-2, 3, 4, -7, -11, 5)$, $(1, -3, -2, 4, -6, 4, 3, -1)$ и $(2, 5, 1, 2, 3)$ има съответно 2, 0, 3, 5 и 0 вариации. Можем да разглеждаме и наредени $n-$орки, в които $a_i = -\infty$ или $a_i = +\infty\ (i = 1, 2, \dots, n)$. Например в $(-\infty, -1, 3, 5, -3)$, $(3, -2, 6, -8, +\infty)$ и $(-\infty, 5, -1, 4, -7, +\infty)$ има съответно 2, 4 и 5 вариации.

Нека сега имаме следната последователност от полиноми $p_1(x)$, $p_2(x),\ldots,$ $p_n(x)$. Ако γ е произволно реално число, което не е корен на никой от полиномите, получаваме крайната числова редица (наредена $n-$орка) $p_1(\gamma)$, $p_2(\gamma),\ldots,$ $p_n(\gamma)$. Броят на вариациите в тази редица ще означаваме с $Var(\gamma)$. Ако $\gamma=-\infty$ или $\gamma=+\infty$, разглеждаме редицата от знаците на границите на полиномите при съответната безкрайност. В този случай ще използваме означенията $Var(-\infty)$ и $Var(+\infty)$.

2. Метод на Щурм за определяне броя на реалните корени на полиноми. Нека $f(x)$ е произволен полином, а $f'(x)$ е неговата производна. Прилагаме алгоритъма на Евклид за намиране на най-големия общ делител на полиномите $f(x)$ и $f'(x)$. Получаваме следната последователност от полиноми: $f(x)=q_1(x)f'(x)+r_1(x)$, $f'(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$, $r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x)$, $\ldots$, $r_{k-2}(x)=q_k(x)r_{k-1}(x)+r_k(x)$, $r_{k-1}(x)=q_{k+1}(x)r_k(x)$. Полагаме $R_1(x)=-r_1(x)$, $R_2(x)=-r_2(x)$, $\ldots$, $R_k(x)=-r_k(x)$. Редицата от полиноми $f(x)$, $f'(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\ldots$, $R_k(x)$ се нарича редица на Щурм за полинома $f(x)$. В сила е следната

Теорема на Щурм. *Броят на реалните корени на полинома $f(x)$ в интервала (α,β) е равен на разликата между вариациите на редицата на Щурм в краищата на (α,β).*

По друг начин казано, броят на реалните корени на $f(x)$ е равен на разликата $Var(\alpha)-Var(\beta)$, отнасяща се за редицата на Щурм. Не се изключват случаите, когато $\alpha=-\infty$ или $\beta=+\infty$. Трябва да се отбележи, че когато $f(x)$ има многократни корени, те се преброяват като прости.

3. Реални корени на полином от втора степен. Добре известно е как се определя броят на реалните корени на полинома $f(x)=ax^2+bx+c$. Сега ще покажем как този резултат се получава по метода на Щурм. Преди това да отбележим, че поради $a\neq 0$, корените на $f(x)$ съвпадат с корените на $g(x)=\frac{1}{a}f(x)$. Редицата на Щурм в този случай е следната: $g(x)=\frac{1}{a}f(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, $g'(x)=2x+\frac{b}{a}$, $R_1(x)=\frac{b^2-4ca}{4a^2}=\frac{D}{4a^2}$, където е използвано стандартното означение $D=b^2-4ac$ за дискриминантата на $f(x)$. Знаците на членовете на редицата на Щурм за $f(x)$ при $x=-\infty$ и $x=+\infty$ са представени в следващата таблица:

x	$g(x)$	$g'(x)$	$R_1(x)$ / $D>0$	Var
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=2$				
x	$g(x)$	$g'(x)$	$R_1(x)$ / $D<0$	Var
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	1
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=0$				
x	$g(x)$	$g'(x)$	$R_1(y)$ / $D=0$	Var
$-\infty$	$+$	$-$	0	1
$+\infty$	$+$	$+$	0	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=1$				

Резултатите, представени в таблицата, водят до формулирането на следните изводи: 1) $f(x)$ има два реални корена при $D=b^2-4ac>0$; 2) $f(x)$ няма реални корени при $D=b^2-4ac<0$; 3) $f(x)$ има един реален корен при $D=b^2-4ac=0$.

Обикновено казваме, че при $D=b^2-4ac=0$ полиномът $f(x)$ има двукратен корен. От получения по-горе резултат се вижда, че методът на Щурм преброява двукратния корен само един път, т.е. като прост корен.

4. Реални корени на полином от трета степен. Обичайната техника при определяне на корените на полинома $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ е свързана с полагането $x=y-\frac{b}{3a}$. След извършване на това полагане полиномът се представя в така наречения каноничен вид

$$\frac{1}{a}f(y)=y^3+\frac{3ca-b^2}{3a^2}y+\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}.$$

В последното равенство полагаме $g(y)=\frac{1}{a}f(y)$, $p=\frac{3ca-b^2}{3a^2}$, $q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$ и $\Delta=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2$. Редицата на Щурм за $g(y)$ е следната $g(y)=y^3+py+q$, $g'(x)=3y^2+p$, $R_1(y)=-\frac{2}{3}py-q$, $R_2(y)=-\frac{1}{4p^2}\left(4p^3+27q^2\right)=-\frac{27}{p^2}\Delta$. Като се вземе предвид, че релациите $\Delta<0$ и $\Delta=0$

са възможни само когато $p<0$, за знаците на членовете на редицата на Щурм за $f(x)$ при $x=-\infty$ и $x=+\infty$ получаваме резултатите, представени в следващата таблица:

x	$g(y)$	$g'(y)$	$R_1(y)$	$R_2(y)$	Var
			$p<0$	$\Delta<0$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=3$					

x	$g(y)$	$g'(y)$	$R_1(y)$		$R_2(y)$	Var
			$p<0$	$p>0$	$\Delta>0$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=1$						

x	$g(y)$	$g'(y)$	$R_1(y)$	$R_2(y)$	Var
			$p<0$	$\Delta=0$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	0	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	0
$Var(-\infty)-Var(+\infty)=2$					

Резултатите, представени в таблицата, водят до формулирането на следните изводи: 1) $f(x)$ има три реални корена при $\Delta<0$; 2) $f(x)$ има един реален корен при $\Delta>0$; 3) $f(x)$ има два реални корена при $\Delta=0$.

Една особеност, която прави впечатление, е че при $\Delta=0$ полиномът има два реални корена. Това е така, защото в този случай $f(x)$ има един прост и един двукратен корен. Както беше споменато при квадратния полином, тук също двукратният корен се брои само веднъж. По този начин се получава, че $f(x)$ има два реални корена.

Сега да определим броя на реалните корени на полинома

(5) $$p(x)=2x^3-3x^2+2.$$

В (5) полагаме $x=y+\frac{1}{2}$. Така получаваме $p(y)=2\left(y^3-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}\right)$. За този полином имаме $\Delta=\frac{9}{64}>0$. Това означава, че $p(x)$ има един реален корен

Друг подход за преброяване на реалните корени на $p(x)$ е като използваме метода на Щурм. Редицата на Щурм в случая е следната $p(x)=2x^3-3x^2+2$, $\frac{1}{6}p'(x)=x^2-x$, $R_1(x)=x-2$, $R_2(x)=-2$. Оттук получаваме неравенствата:

$p(-\infty)<0$, $\frac{1}{6}p'(-\infty)>0$, $R_1(-\infty)<0$, $R_2(-\infty)<0$, $p(+\infty)>0$, $\frac{1}{6}p'(+\infty)>0$, $R_1(+\infty)>0$, $R_2(+\infty)<0$. Следователно $Var(-\infty)=2$, $Var(+\infty)=1$ и $Var(-\infty)-Var(+\infty)=1$. Така получаваме същия резултат както преди.

Ще отбележим, че според формулите на Виет произведението на всички корени на $p(x)$ е равно на $-\frac{2}{2}=-1$. Затова реалният корен на $p(x)$ е отрицателен. Този факт може да се установи и по метода на Щурм за $x\in(-\infty,0)$. При $x=0$ имаме $p(0)=2>0$, $\frac{1}{6}p'(0)=0$, $R_1(0)=-2<0$, $R_2(-2)<0$. Тъй като $p'(0)=0$, взимаме $x=-\varepsilon$, където $\varepsilon\to 0$ с положителни стойности. Така получаваме $\frac{1}{6}p'(-\varepsilon)=\varepsilon(\varepsilon+1)>0$. Следователно $Var(0)=1$ и $Var(-\infty)-Var(0)=1$. Оттук следва, че единственият реален корен на $p(x)$ е отрицателен. Нека този корен е $-\gamma$ $(\gamma>0)$. Тогава $p(x)$ се представя по следния начин: $p(x)=2(x+\gamma)(x^2+p_1x+q_1)$. Така стигаме до извода, че $p(x)>0$ за всички положителни стойности на x.

5. Няколко полинома от по-висока степен. Щеприложим метода на Щурм при решаването на няколко задачи за полиноми, които има степени, по-високи от трета. След това ще направим някои изводи от решенията им.

Задача 1. Даден е полиномът

$$q(x)=8x^4+4x^3-27x^2+16x+8. \tag{6}$$

Да се определи броят на реалните корени, когато а) $x\in(-\infty,+\infty)$; б) $x\in(-3,0)$.

Редицата на Щурм за полинома $q(x)$ е следната:

$q(x)$, $\frac{1}{2}q'(x)=16x^3+6x^2-27x+8$, $R_1(x)=\frac{1}{16}(222x^2-219x-120)$, $R_2(x)=-\frac{24}{1369}(179x+1128)$, $R_3(x)=-\frac{20177691}{32041}$.

а) При $x\in(-\infty,+\infty)$ имаме: $q(-\infty)>0$, $\frac{1}{2}q'(-\infty)<0$, $R_1(-\infty)>0$, $R_2(-\infty)>0$, $R_3(-\infty)<0$, $q(+\infty)>0$, $\frac{1}{2}q'(+\infty)>0$, $R_1(+\infty)>0$, $R_2(+\infty)<0$, $R_3(+\infty)<0$. Оттук $Var(-\infty)=3$, $Var(+\infty)=1$ и $Var(-\infty)-Var(+\infty)=2$. Следователно $q(x)$ има два реални корена.

б) При $x \in (-3,0)$ имаме: $f(-3) = 257 > 0$, $\frac{1}{2} f'(-3) = -289 < 0$, $R_1(-3) = \frac{2535}{16} > 0$, $R_2(-3) = -\frac{14184}{1369} < 0$, $R_3(-3) = -\frac{20177691}{32041} < 0$, $q(0) = 8 > 0$, $\frac{1}{2} q'(0) = 8 > 0$, $R_1(0) = -\frac{15}{2} < 0$ $R_2(0) = -\frac{27072}{1369} < 0$, $R_3(0) = -\frac{20177691}{32041} < 0$,. Оттук $Var(-3) = 3$, $Var(0) = 1$ и $Var(-3) - Var(0) = 2$. Следователно в интервала $(-3,0)$ полиномът $q(x)$ има два реални корена.

От а) и б) следва, че всички реални корени на $q(x)$ се намират в интервала $(-3,0)$.

Задача 2. Да се определи броят на реалните корени на полинома

(7) $$\xi(x) = 16x^6 - 16x^5 - 36x^4 - 84x^3 + 45x^2 + 194x + 169.$$

Редицата на Щурм за полинома $\xi(x)$ е следната:

$$\xi(x),\ \frac{1}{2}\xi'(x) = 48x^5 - 40x^4 - 72x^3 - 126x^2 + 45x + 97,$$

$$R_1(x) = \frac{1}{18}\left(256x^4 + 828x^3 - 414x^2 - 2955x - 3139\right),$$

$$R_2(x) = \frac{1}{1024}\left(-652428x^3 - 115002x^2 + 1659087x + 2352231\right),$$

$$R_3(x) = \frac{16384}{2955988161}\left(-992282x^2 + 413191x + 3171973\right),$$

$$R_4(x) = \frac{2955988161}{252063633286144}\left(48923873x - 92947097\right),$$

$$R_5(x) = -\frac{54533967061457254400000}{262047841311367063814547}.$$

Имаме $\xi(-\infty) > 0$, $\frac{1}{2}\xi'(-\infty) < 0$, $R_1(-\infty) > 0$, $R_2(-\infty) > 0$, $R_3(-\infty) < 0$, $R_4(-\infty) < 0$, $R_5(-\infty) < 0$, $\xi(+\infty) > 0$, $\frac{1}{2}\xi'(+\infty) > 0$, $R_1(+\infty) > 0$, $R_2(+\infty) < 0$, $R_3(+\infty) < 0$, $R_4(+\infty) > 0$, $R_5(-\infty) < 0$. Оттук $Var(-\infty) = Var(+\infty) = 3$ и $Var(-\infty) - Var(+\infty) = 0$. Следователно $\xi(x)$ няма реални корени.

Като вземем предвид, че $\xi(0) = 169 > 0$, стигаме до извода, че за всички реални стойности на x е изпълнено неравенството $\xi(x) > 0$.

Подобно на задача 2 се решава следната

Задача 3. Да се докаже, че за всички реални стойности на λ са изпълнени неравенствата:

$$2\lambda^6 - 6\lambda^5 + 10\lambda^4 - 14\lambda^3 + 12\lambda^2 - 5\lambda + 2 > 0,$$
$$2\lambda^6 - 5\lambda^5 + 12\lambda^4 - 14\lambda^3 + 10\lambda^2 - 6\lambda + 2 > 0.$$

Задача 4. Да се докаже, че за всички реални стойности на λ полиномът

$$\begin{aligned}(8)\qquad s(\lambda)=16\lambda^{12}-16\lambda^{11}+60\lambda^{10}-164\lambda^{9}+141\lambda^{8}-218\lambda^{7}+\\ +363\lambda^{6}-218\lambda^{5}+141\lambda^{4}-164\lambda^{3}+60\lambda^{2}-16\lambda+16\end{aligned}$$

приема само положителни стойности.

Тъй като $\lambda=0$ не е корен на $s(\lambda)$, можем да го разделим на λ^6. Така получаваме равенството

$$\begin{aligned}\frac{s(\lambda)}{\lambda^6}=16\left(\lambda^6+\frac{1}{\lambda^6}\right)-16\left(\lambda^5+\frac{1}{\lambda^5}\right)+60\left(\lambda^4+\frac{1}{\lambda^4}\right)-\\ -164\left(\lambda^3+\frac{1}{\lambda^3}\right)+141\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)-218\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+363.\end{aligned}$$

Полагаме $x=\lambda+\dfrac{1}{\lambda}$. Като вземем предвид равенствата

$$\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2-2=x^2-2,$$

$$\lambda^4+\frac{1}{\lambda^4}=\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)^2-2=\left(x^2-2\right)^2-2,$$

$$\lambda^5+\frac{1}{\lambda^5}=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\left[\left(\lambda^4+\frac{1}{\lambda^4}\right)-\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)+1\right]=x\left[\left(x^2-2\right)^2-\left(x^2-2\right)-1\right],$$

$$\lambda^6+\frac{1}{\lambda^6}=\left(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(\lambda^4+\frac{1}{\lambda^4}-1\right)=\left(x^2-2\right)\left[\left(x^2-2\right)^2-3\right],$$

получаваме $\dfrac{s(\lambda)}{\lambda^6}=16x^6-16x^5-36x^4-84x^3+45x^2+194x+169=\xi(x)$, където $\xi(x)$ е полиномът (7). Според задача 2 имаме $\xi(x)>0$. Следователно $s(\lambda)>0$ за всички реални стойности на λ.

7. Три неравенства. Ще докажем следното твърдение: Ако u, v и w са неотрицателни числа, то са изпълнени неравенствата:

$$(9)\qquad 3\left(u^2v+v^2w+w^2u-uvw\right)\le 2\left(u^3+v^3+w^3\right),$$

$$(10)\qquad 3\left(uv^2+vw^2+wu^2-uvw\right)\le 2\left(u^3+v^3+w^3\right).$$

Ако $w=0$, първото неравенство се превръща в $3u^2v\le 2\left(u^3+v^3\right)$. При $v=0$ или $u=0$ последното неравенство води съответно до $u\ge 0$ или $v\ge 0$ –неравенства, които са изпълнени по условие. Затова предполагаме, че $u\ne 0$ и $v\ne 0$. Тогава последното неравенство е еквивалентно с $\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\ge\dfrac{3}{2}$, което е винаги изпълнено, защото $\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}\ge 2$. Следователно неравенството е вярно, когато едно от числата u, v и w е равно на нула. Затова по-нататък ще предполагаме, че $w\ne 0$. Неравенството (9) се превръща в равенство при $u=v=w$. Ако предположим, че $w=v$, неравенството (9) е еквивалентно с $2u^3+v^3-3u^2v\ge 0$ или $u^2v\left(2\frac{u}{v}+\frac{v^2}{u^2}-3\right)\ge 0$. Но от неравенството между средните имаме $2\frac{u}{v}+\frac{v^2}{u^2}-3=\frac{u}{v}+\frac{u}{v}+\frac{v^2}{u^2}-3\ge 3\sqrt[3]{\frac{u}{v}.\frac{u}{v}.\frac{v^2}{u^2}}-3=0$. Следователно (9) е изпълнено и в този случай. Нещо повече, оттук следва, че неравенството (9) се превръща в равенство само когато $u=v=w$. Тези наблюдения дават възможност да въведем следните полагания $u=xw$ и $v=yw$, като $x>0$, $y>0$ и $y\ne 1$. Така (9) приема вида $w^3\left[-2x^3+3yx^2-3(y-1)x-\left(2y^3-3y^2+2\right)\right]\le 0$. Оттук се вижда, че неравенството (9) е изпълнено, когато полиномът $F(x)=-2x^3+3yx^2-3(y-1)x-\left(2y^3-3y^2+2\right)$ приема само отрицателни стойности при $x>0$. За този полином имаме $\Delta=(y-1)^2\left(8y^4+4y^3-27y^2+16y+8\right)=(y-1)^2q(y)$, където $q(y)$ е полиномът (6). От задача 1 е известно, че $q(y)$ има два реални корена в интервала $(-3,0)$. Нека тези корени са $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$ ($\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$). Тогава имаме $q(y)=8(y+\alpha_1)(y+\alpha_2)\left(y^2+p_1y+q_1\right)>0$ и $\Delta>0$. Оттук следва, че $F(x)$ има един реален корен β. Като вземем предвид, че за всички положителни стойности на y полиномът $p(y)$ от (5) приема само положителни стойности, то за произведението на корените на $F(x)$ имаме $-\frac{2y^3-3y^2+2}{2}=-\frac{p(y)}{2}<0$. Следователно $\beta=-\beta_0\ (\beta_0>0)$. Това означава, че $F(x)$ се представя във вида $F(x)=-2(x+\beta_0)\left(x^2+p_2x+q_2\right)$. Следователно за всяко $x>0$ е изпълнено неравенството $F(x)<0$. С това неравенството (9) е доказано.

Неравенството (10) се доказва по същия начин. Трябва изрично да подчертаем, че в неравенствата (9) и (10) равенствата се достигат тогава и само тогава, когато $u=v=w$. Този факт ще бъде използван съществено при доказателството на следващото неравенство.

Нека ABC е неравностранен триъгълник със страни a, b и c. Тогава за коефициентите M, N и K от (3) е изпълнено неравенството

(11) $$3M^2+3N^2-2MK-2NK<0.$$

Първо да отбележим, че от неравенството между средните следват неравенствата $M>0$ и $N>0$. Означаваме $u=a^2$, $v=b^2$ и $w=c^2$. Тогава от (9) и (10) следват неравенствата

$$3M-2K=3\left(u^2v+v^2w+w^2u-uvw\right)-2\left(u^3+v^3+w^3\right)<0,$$

$$3N-2K=3\left(uv^2+vw^2+wu^2-uvw\right)-2\left(u^3+v^3+w^3\right)<0.$$

Остава да забележим, че $3M^2+3N^2-2MK-2NK=M(3M-2K)+N(3N-2K)$. Като използваме последните две неравенства, получаваме доказателство на неравенството

(11). Неравенствата навсякъде са строги поради това, че триъгълникът не е равностранен.

8. Изследване на полинома $\varphi(\lambda)$. Лесно се вижда, че при $a=b=c$ полиномът $\varphi(\lambda)$ от (1) е тъждествено равен на нула за всяко λ. Ако $c=b\neq a$, то от (1) и (3) имаме

$$\varphi(\lambda)=\left(a^2-b^2\right)^2\left[b^2\lambda^4-2b^2\lambda^3+\left(a^2+2b^2\right)\lambda^2-2b^2\lambda+b^2\right]=$$
$$=\left(a^2-b^2\right)^2\left[a^2\lambda^2+b^2(\lambda-1)^2\left(\lambda^2+1\right)\right]>0.$$

Затова по-нататък ще предполагаме, че всеки две от числата a, b и c са различни. Редицата на Щурм за $\varphi(\lambda)$ е следната:

$$\varphi(\lambda)=M\lambda^4-2N\lambda^3+K\lambda^2-2M\lambda+N\,,\ \frac{1}{2}\varphi'(\lambda)=2M\lambda^3-3N\lambda^2+K\lambda-M\ ,$$

$$R_1(\lambda)=\frac{1}{4M}\left[\left(3N^2-2MK\right)\lambda^2+\left(6M^2-NK\right)\lambda-3MN\right],$$

$$R_2(\lambda)=\frac{4M}{\left(3N^2-2MK\right)^2}\left[\left(-18M^4+18M^2NK-18MN^3-MK^3+N^2K^2\right)\lambda+\right.$$
$$\left.+9M^4N+M^2K^2-9MN^2K+9N^4\right],$$

$$R_3=-\frac{1}{4M\left(18M^4-18M^2NK+18MN^3+MK^3-N^2K^2\right)^2}\times$$
$$\times(3M+3N+K)\left(3N^2-2MK\right)^2\left(M^3-MNK+N^3\right)\left(9M^2+9N^2+K^2-9MN-3MK-3NK\right).$$

Нека $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$. Тогава $\varphi(\lambda)=\lambda^4\zeta(\mu)$, където

$$\zeta(\mu)=N\mu^4-2M\mu^3+K\mu^2-2N\mu+M\,.$$

Ако λ_0 е реален корен на $\varphi(\lambda)$, то $\mu_0=\dfrac{1}{\lambda_0}$ е реален корен на $\zeta(\mu)$. Затова полиномите $\varphi(\lambda)$ и $\zeta(\mu)$ имат еднакъв брой реални корени. Следователно, ако знаем броя на реалните корени на единия от полиномите $\varphi(\lambda)$ и $\zeta(\mu)$, ще знаем същото и за другия.

Редицата на Щурм за $\zeta(\mu)$ е следната:

$$\zeta(\mu)=N\mu^4-2M\mu^3+K\mu^2-2N\mu+M\,,\ \frac{1}{2}\zeta'(\mu)=2N\mu^3-3M\mu^2+K\mu-N\ ,$$

$$\bar{R}_1(\mu)=\frac{1}{4N}\left[\left(3M^2-2NK\right)\mu^2+\left(6N^2-MK\right)\mu-3MN\right],$$

$$\bar{R}_2(\mu)=\frac{4N}{\left(3M^2-2NK\right)^2}\left[\left(-18N^4+18N^2MK-18M^3N+M^2K^2-NK^3\right)\mu+\right.$$
$$\left.+9N^4M+N^2K^2-9NM^2K+9M^4\right],$$

$$\overline{R}_3(\mu) = R_3(\lambda) = -\frac{1}{4N\left(18N^4 - 18N^2MK + 18NM^3 + NK^3 - M^2K^2\right)^2} \times$$
$$\times(3M + 3N + K)\left(3M^2 - 2NK\right)^2\left(M^3 - MNK + N^3\right)\left(9M^2 + 9N^2 + K^2 - 9MN - 3MK - 3NK\right).$$

Сега да отбележим, че от (2) следват неравенствата:

$$M^3 - MNK + N^3 = -a^2b^2c^2\left(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2\right)^3 < 0,$$
$$9M^2 + 9N^2 + K^2 - 9MN - 3MK - 3NK = \left(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2\right)^3 > 0.$$

От тези неравенства получаваме $R_3(\lambda) = \overline{R}_3(\mu) > 0$.

Знаците на $R_1(\lambda)$ и $\overline{R}_1(\mu)$ при $\lambda = -\infty$ и $\lambda = +\infty$ зависят от знаците на $r_1 = 3N^2 - 2MK$ и $\overline{r}_1 = 3M^2 - 2NK$. Лесно се вижда, че $N = M$ тогава и само тогава, когато поне две от числата a, b и c са равни. Тъй като този случай беше разгледан, остава $M > N$ или $M < N$. Ако предположим $M > N$, то $r_1 - \overline{r}_1 = (N - M)(3M + 3N + 2K) < 0$. Освен това от неравенството (11) имаме $r_1 + \overline{r}_1 = 3M^2 + 3N^2 - 2MK - 2NK < 0$. Тогава $r_1 < 0$. В случая $M < N$ по същия начин се получава $\overline{r}_1 < 0$.

Знаците на $R_2(\lambda)$ и $\overline{R}_2(\mu)$ при $\lambda = -\infty$ и $\lambda = +\infty$ зависят от знаците на

$$r_2 = -18M^4 + 18M^2NK - 18MN^3 - MK^3 + N^2K^2,$$
$$\overline{r}_2 = -18N^4 + 18N^2MK - 18M^3N + M^2K^2 - NK^3.$$

Тук обаче не можем да приложим горната идея, защото знакът на $r_2 + \overline{r}_2$ зависи от стойностите a, b и c. Например при $a = 2{,}64$, $b = 2{,}34$, $c = 2{,}38$ е изпълнено $r_2 + \overline{r}_2 < 0$, а при $a = 2{,}74$, $b = 2{,}62$, $c = 2{,}38$ е изпълнено $r_2 + \overline{r}_2 > 0$.

Сега да предположим, че $M > N$. Тогава разглеждаме редицата $\varphi(\lambda)$, $\frac{1}{2}\varphi'(\lambda)$, $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, $R_3(\lambda)$. От направените изводи имаме $\varphi(-\infty) > 0$, $\frac{1}{2}\varphi'(-\infty) < 0$, $R_1(-\infty) < 0$, $R_2(-\infty) > 0$ или $R_2(-\infty) < 0$, $R_3(-\infty) > 0$. Затова $Var(-\infty) = 2$. Освен това $\varphi(+\infty) > 0$, $\frac{1}{2}\varphi'(+\infty) > 0$, $R_1(+\infty) < 0$, $R_2(+\infty) < 0$ или $R_2(+\infty) > 0$, $R_3(+\infty) > 0$ и отново $Var(+\infty) = 2$. Така получаваме $Var(-\infty) - Var(+\infty) = 0$. Следователно $\varphi(\lambda)$ няма реални корени.

Ако $M < N$, разглеждаме редицата $\zeta(\mu)$, $\frac{1}{2}\zeta'(\mu)$, $\overline{R}_1(\mu)$, $\overline{R}_2(\mu)$, $\overline{R}_3(\mu)$. По същия начин виждаме, че $\zeta(\mu)$ няма реални корени. Остава да забележим, че $\varphi(0) = N > 0$. Така окончателно стигаме до извода, че неравенството $\varphi(\lambda) > 0$ е изпълнено за всички реални стойности на λ.

9. Изследване на полинома $\psi(\lambda)$. Ако $a=b=c$, от (2) и (4) следва $\psi(\lambda)=2c\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^3$, което означава, че $\psi(\lambda)$ няма реални корени. По-нататък ще предполагаме, че поне две от числата a, b и c са различни.

Ако $g(\lambda)=2a^2b^2c^2\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^3=T.\left(\lambda^2-\lambda+1\right)^3$, то $\psi(\lambda)=g(\lambda)-\lambda\varphi(\lambda)$, където $\varphi(\lambda)$ е полиномът от (1). Полиномът $g(\lambda)$ е изпъкнала функция при $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ и има минимум $g_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{64}.T$. Затова графиката на полинома от шеста степен $g(\lambda)$ е подобна на парабола. Следователно тази графика разделя равнината на две области, едната от които е вътрешна за графиката на $g(\lambda)$.

Ще докажем, че полиномът $\eta(\lambda)=\lambda\varphi(\lambda)$ има най-много два екстремума. За целта по метода на Щурм ще докажем, че производната му има най-много два реални корена. Редицата на Щурм за $\eta'(\lambda)$ е следната:

$$\eta'(\lambda)=5M\lambda^4-8N\lambda^3+3K\lambda^2-4M\lambda+N\,,\quad \frac{\eta''(\lambda)}{2}=10M\lambda^3-12N\lambda^2+3K\lambda-2M\,,$$

$$R_1(\lambda)=\frac{3}{10M}\left[\left(8N^2-5MK\right)\lambda^2+2\left(5M^2-NK\right)\lambda-2MN\right],$$

$$R_2(\lambda)=\frac{5M}{\left(8N^2-5MK\right)^2}\left(-15MK^3+16N^2K^2+220M^2NK-224MN^3-200M^4\right)\lambda+$$
$$+2\left(5M^2K^2-32MN^2K+20M^3N+32N^4\right),$$

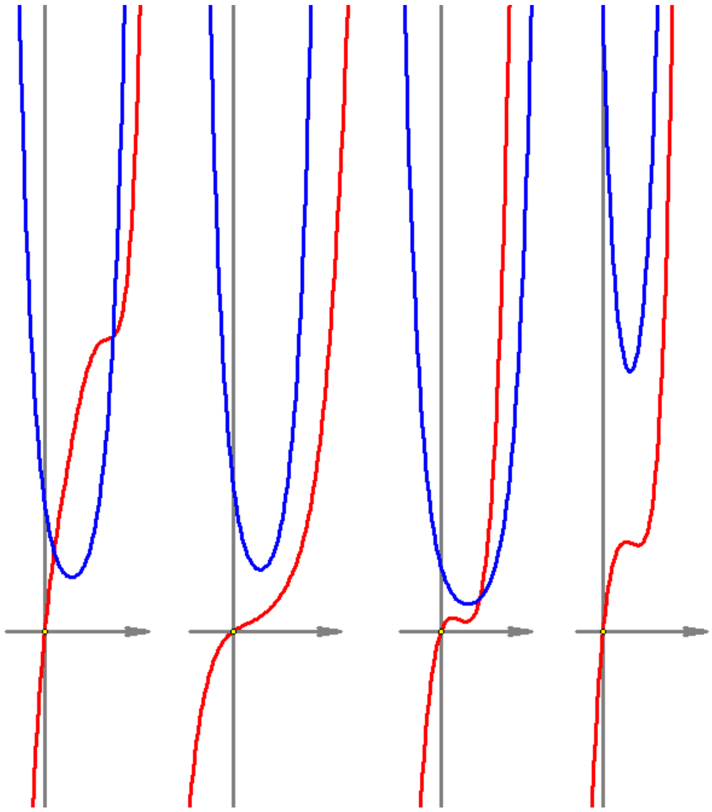
$$R_3(\lambda)=\frac{3}{5M\left(200M^4-220M^2NK+224MN^3+15MK^3-16K^2N^2\right)^2}\times$$
$$\times\left[15MNK^4-4\left(5M^3+4N^3\right)K^3-312M^2N^2K^2+144MN\left(5M^3+4N^3\right)K-\right.$$
$$\left.-16\left(M+N\right)\left(M^2-MN+N^2\right)\left(25M^3+16N^3\right)\right].$$

При $\lambda=0$ имаме $\eta'(0)=N>0$, $\frac{\eta''(0)}{2}=-2M<0$ и $R_1(0)=-\frac{3N}{5}<0$. Затова в редицата $\eta'(0)$, $\frac{\eta''(0)}{2}$, $R_1(0), R_2(0)$, $R_3(0)$ има най-много три вариации. В редицата $\eta'(+\infty)$, $\frac{\eta''(+\infty)}{2}$, $R_1(+\infty), R_2(+\infty)$, $R_3(+\infty)$ е възможно да няма нито една вариация. Затова най-голямата разлика на вариациите в интервала $(0,+\infty)$ е равна на три. Това означава, че полиномът $\eta'(\lambda)$ има най-много три реални корена в интервала $(0,+\infty)$. Ако $\eta'(\lambda)$ има три реални корена λ_1, λ_2 и λ_3 в интервала $(0,+\infty)$, то $\eta'(\lambda)$ има и реален корен λ_4 в интервала $(-\infty,0)$. Тъй като $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \dfrac{N}{5M} > 0$, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$, което е невъзможно. Следователно $\eta'(\lambda)$ има най-много два реални корена. Оттук следва, че $\eta(\lambda)$ има най-много два екстремума. Затова графиката на полинома от пета степен $\eta(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ е подобна на кубична парабола.

Броят на реалните корени на полинома от шеста степен $\psi(\lambda) = g(\lambda) - \lambda\varphi(\lambda)$ зависи от броя на пресечните точки на графиките на $g(\lambda)$ и $\eta(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$. Възможни са следните случаи:

1) Полиномът $\eta(\lambda)$ няма екстремуми. Тогава $\eta(\lambda)$ е растяща функция и затова имаме: а) графиките на $\eta(\lambda)$ и $g(\lambda)$ се пресичат в две точки (Фиг. 1); б) графиките на $\eta(\lambda)$ и $g(\lambda)$ нямат общи точки (Фиг. 2).

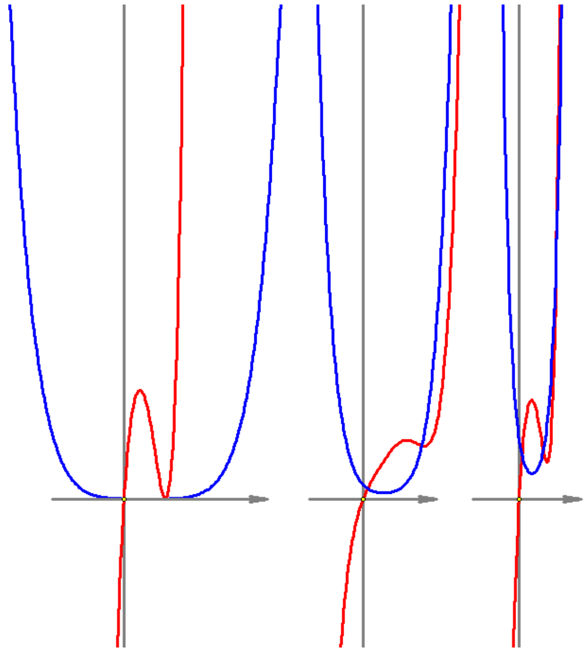
2) Полиномът $\eta(\lambda)$ има екстремуми, които лежат вън от областта, която загражда графиката на $g(\lambda)$ равнината. Тогава имаме: а) графиките на $\eta(\lambda)$ и $g(\lambda)$ се пресичат в две точки (Фиг. 3) (втората пресечна точка не се вижда); б) графиките на $\eta(\lambda)$ и $g(\lambda)$ нямат общи точки (Фиг. 4).



Фиг. 1 **Фиг. 2** **Фиг. 3** **Фиг. 4**

3) Полиномът $\eta(\lambda)$ има екстремуми, които лежат в областта, която загражда графиката на $g(\lambda)$ в равнината. Тогава графиките на $\eta(\lambda)$ и $g(\lambda)$ се пресичат в две точки (Фиг. 5) (втората пресечна точка не се вижда).

4) Полиномът $\eta(\lambda)$ има екстремуми, единият от които лежи в областта, която загражда графиката на $g(\lambda)$ в равнината (максимум), а другият е външен за тази област (минимум). Тогава при нарастването си от $-\infty$ до максимума графика на $\eta(\lambda)$ пресича графиката на $g(\lambda)$. При намаляване на $\eta(\lambda)$ от максимума до минимума графиката на $\eta(\lambda)$ пресича графиката на $g(\lambda)$ втори път. По-нататък имаме: а) при нарастване от минимума до $+\infty$, графиката на $\eta(\lambda)$ не пресича графиката на $g(\lambda)$ (Фиг. 6); б) при нарастване от минимума до $+\infty$, графиката на $\eta(\lambda)$ пресича два пъти графиката на $g(\lambda)$ (Фиг. 7).



Фиг. 5 **Фиг. 6** **Фиг. 8**

От разгледаните случаи следва, че полиномът от шеста степен $\psi(\lambda)$ има най-много четири реални корена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., В. Ненков. Криви от втора степен и триъгълници, породени от секущи и изогоналност, Математика плюс, 1, 2018, 42 – 64.

2. Обрешков, Н. Висша алгебра. София: Наука и изкуство, 1966.

3. Ръководство за упражнения по висша алгебра. Пръстени и полета. Полиноми. Групи. София: Наука и изкуство, 1976.

4. Bradly, C. Introduction to Inequalities. UKTM, 2010.